大型软件应用

有限单元法（finite element method）

刘治军 青年研究员

土木工程系

liuzhijun@lzu.edu.cn

课程内容

第1讲-有限元概述

第2讲-杆系结构的直接法

第3讲-张量、变分以及弹性力学问题变分原理

第4讲-连续体问题的有限元

第5讲-典型单元分析

第6讲-等参元与数值积分

第7讲-几个基础问题

第8讲-梁问题的有限元

第9讲-板问题的有限元

第1讲　有限元概述

本讲内容

1 有限单元法

■有限单元法提出的背景与历史

■有限元单元法的应用

2 不同数值方法简介

有限元的背景和历史

为何需要有限元?

复杂的偏微分方程求解（非线性、复杂几何形状等）。

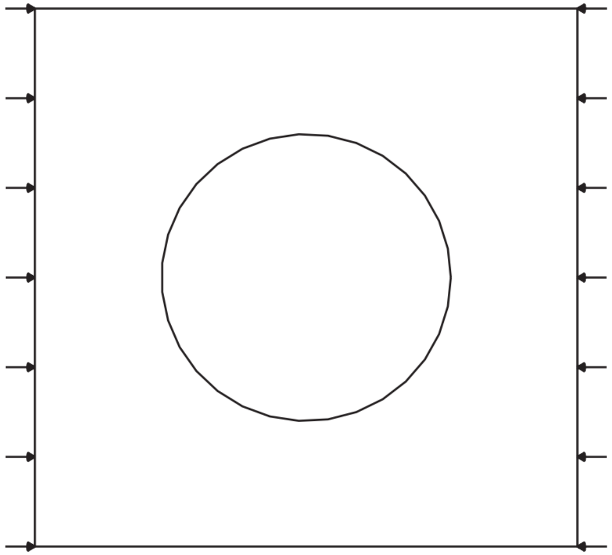
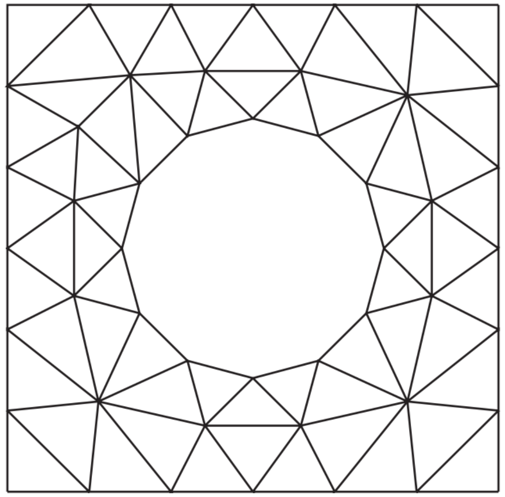


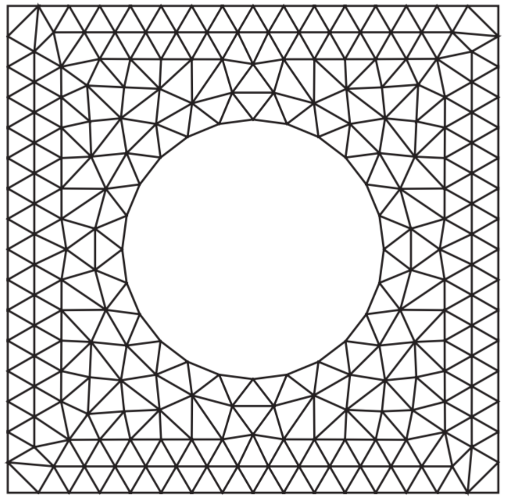
Plate with a Hole

Triangular Finite Element

初识有限元



Finite Element Model



Refined Finite Element Model

有限元的历史

- M.J.Turner、 R.W.Clough、H.C. Martin 和L.J. Topp 1956年发表了第一篇有限元文献(1943年Courant的论文中使用了三角形单元和变分原理求解问题)。
- Clough首次使用“finite elements”这一名词。
- 伯克利(UC Berkeley)是有限元的发源地（ R.W.Clough、E.Wilson、R.L. Taylor 、T.J.R. Hughes, C. Felippa 、K.J. Bathe）。
- 有限元发展史上做出杰出贡献的学者:O.C. Zienkiewicz(Swansea)、J.H.Argyris 、J.T.Oden(U.T.Austin)。
- 我国的冯康先生独立建立了有限元的数学理论。

有限元的背景和历史

有限元的重要性

- 数值模拟是科学研究方法之一。
- 有限元是20世纪最伟大的科技发明之一。
- 美国每年在有限元软件和计算上花费10亿美元（J. Fish书）。
- 有限元分析计算结果已成为大量工程设计标准（航空、汽车、大坝…）。

有限元的应用范围

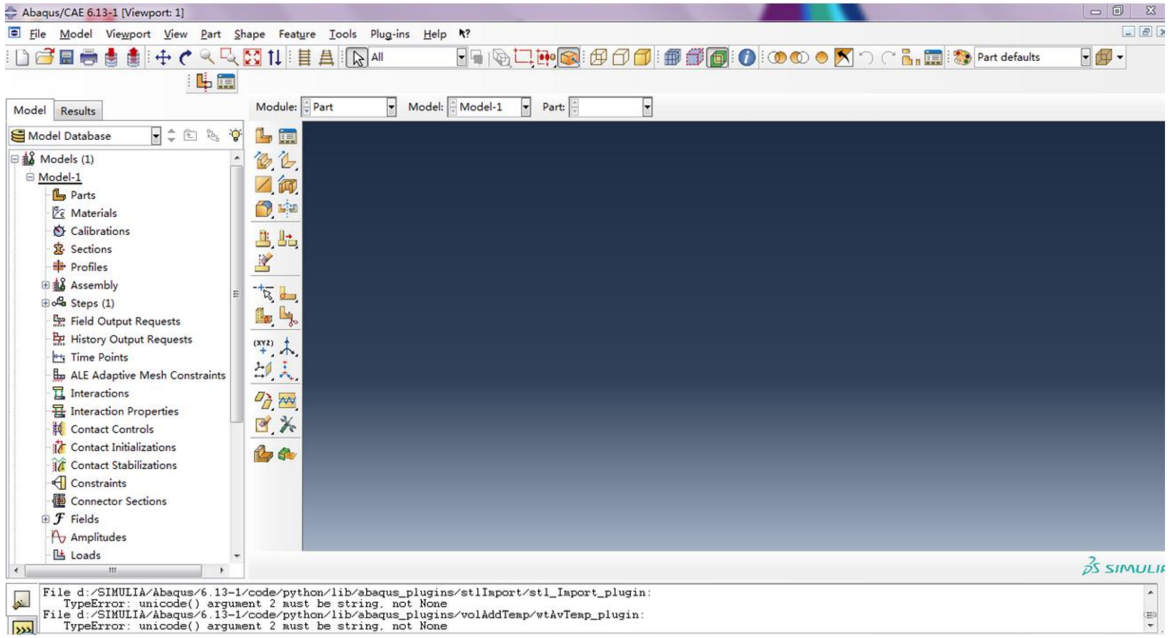
- 工业构件(电子管、压力管道、汽车、飞机)的应力和热分析。
- 大坝、电站、高层建筑等的动力分析。
- 汽车、火车和航空器的碰撞模拟。
- 通风设备内空气、污染物等的流动模拟。
- 晶体管等的电磁分析。
- 人造关节等手术过程的模拟。
- ……

有限元软件

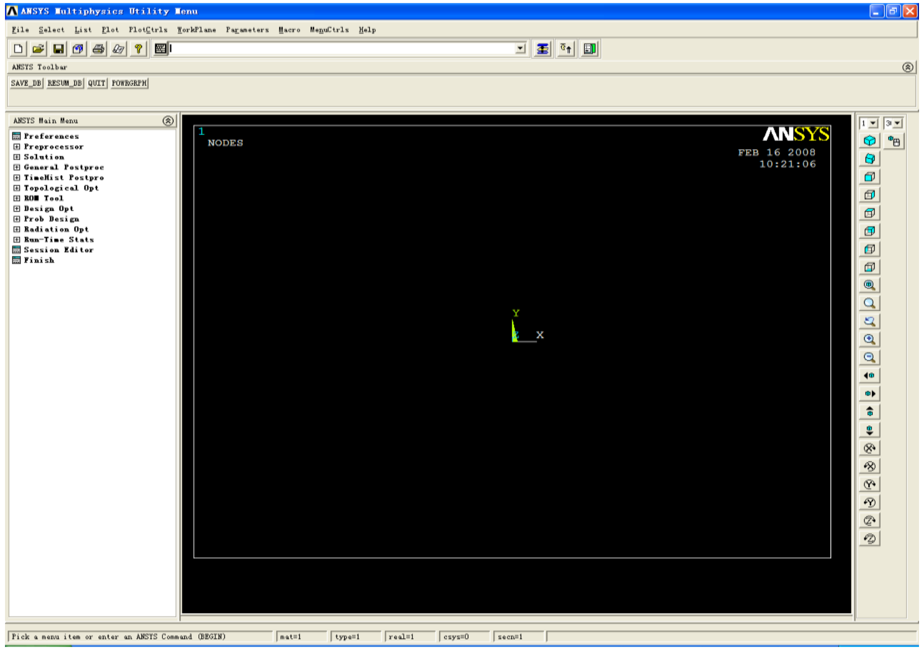
- Abaqus
- Ansys
- Adina
- NASTRAN
- ……

有限元软件

Abaqus



ANSYS



有限元参考书

教材

1. Jacob Fish and Ted Belytschko, A First Course in Finite Elements, 2007.
2. **Klaus-Jürgen Bathe, Finite Element Procedures, 1996.**
3. J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill, NY, 2006.
4. **T.J.R. Hughes, The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Analysis, 1987.**

有限元参考书

非线性有限元

1. J.C. Simo, T.J.R. Hughes, Computational Inelasticity, Springer-Verlag, New York, 1998.
2. E.A. de Souza Neto, D. Peric, D. R. J Owen, Computational Methods for Plasticity, 2008.
3. Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran, Khalil Elkhodary, Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, Second Edition, 2014.
4. M.A. Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol I: Essentials.
5. M.A. Crisfield, Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Vol II: Advanced Topics
6. Javier Bonet, Richard D. Wood, Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2008.

有限元参考书

数学理论

1. Gilbert Strang, George J. Fix, An Analysis of the Finite Element, Wellesley-Cambridge, 2008.
2. Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott, The Mathematical Theory of Finite Element Methods, 3rd edition.
3. Daniele Boffi, Franco Brezzi, Michel Fortin, Mixed Finite Element Methods and Applications, 2013

有限元参考书

其他

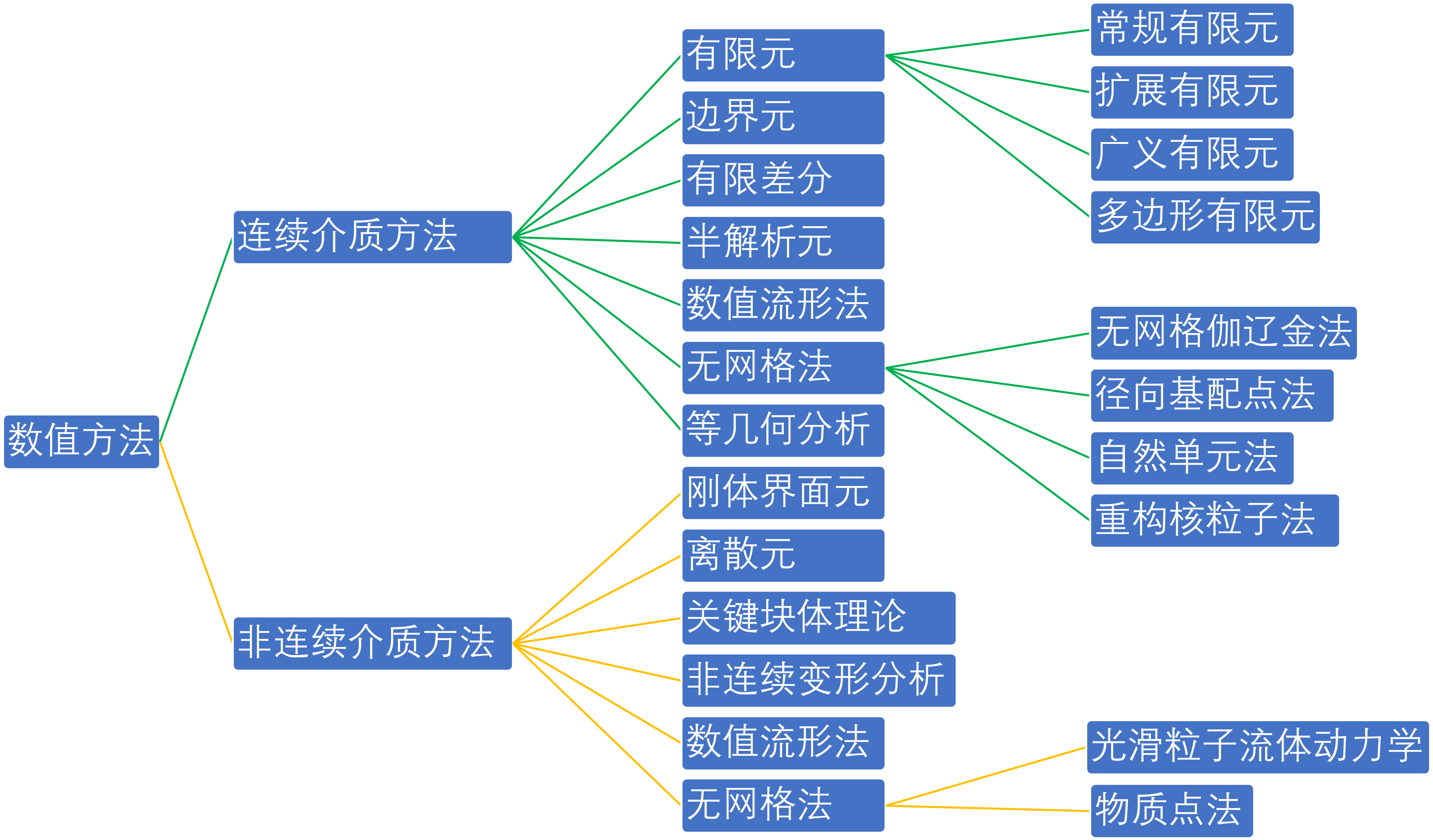
1. Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor, J.Z. Zhu, The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals: Its Basis and Fundamentals, 7th edition.
2. Olek C Zienkiewicz, Robert L Taylor, J.Z. Zhu, The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, 7th edition.
3. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, P.Nithiarasu, The Finite Element Method for Fluid Dynamics, 7th edition.
4. Ian M. Smith, D.V. Griffiths, Lee Margetts, Programming the Finite Element Method, Fifth Edition, 2015.
5. 朱伯芳,有限单元法原理与应用, 第四版

不同数值方法简介

常用的数值方法

有限元法(finite element method, FEM)
扩展有限元法(eXtended finite element method, XFEM)
广义有限元法(generalized finite element method, GFEM)
数值流形法(numerical manifold method, NMM)
间断有限元法(discontinuous Galerkin method, DG)
单位分解法(partition of unity method, PUM)
边界元法(boundary element method, BEM)
无网格法(meshfree/meshless method, MM)
等几何分析方法(isogeometric analysis, IGA)
离散元法(discrete element method, DEM)---UDEC, 3DEC, PFC
非连续变形分析(discontinuous deformation analysis, DDA)
有限差分法(finite difference method, FDM)
有限体积法(finite volume method, FVM)
Virtual element method, 拉格朗日元法, Lattice-Boltzman method(LBM), 近场动力学(peridynamics)

不同数值方法简介

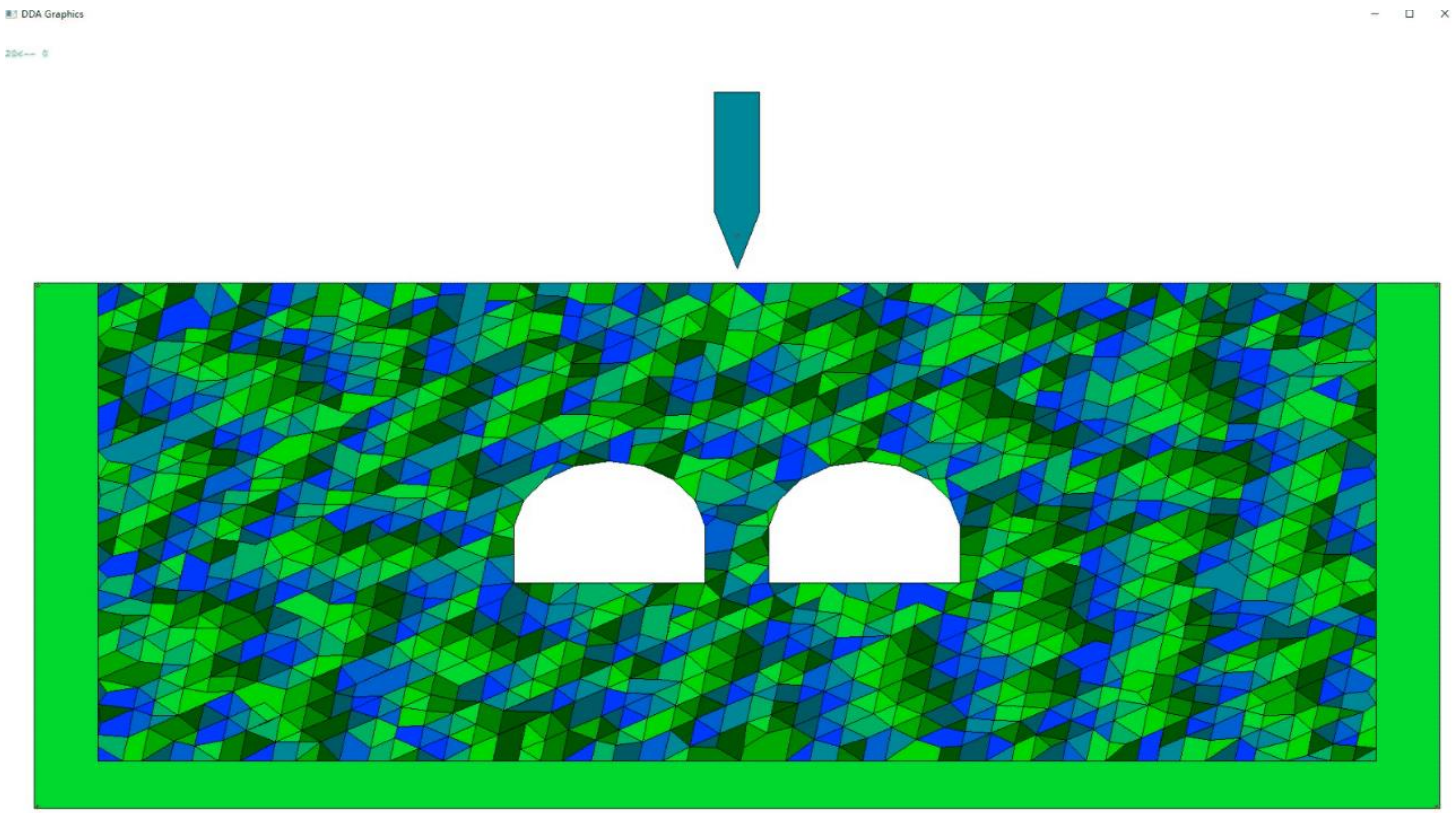

数值方法
连续介质方法
非连续介质方法
有限元
边界元
有限差分
半解析元
数值流形法
无网格法
等几何分析
刚体界面元
离散元
关键块体理论
非连续变形分析
数值流形法
无网格法
常规有限元
扩展有限元
广义有限元
多边形有限元
无网格伽辽金法
径向基配点法
自然单元法
重构核粒子法
光滑粒子流体动力学
物质点法

不同数值方法简介

有限元法(FEM)	应用最广
有限差分法(FDM)	方法较早
快速拉格朗日差分法(FLAC)	适用于大变形和非线性问题
边界元（BEM)	不能适用复杂非线性问题
离散元(DEM)	适合模拟散体和破碎问题
半解析元法	结合数值方法和解析解，适用范围不广
非连续变形分析法(DDA)	隐式，可以采用大步长
数值流形法(NMM)	统一处理连续-非连续
无网格伽辽金法(EFG)	避免单元畸变、精度高、计算量大
光滑粒子流体动力学(SPH)	适用冲击破坏问题以及流体问题

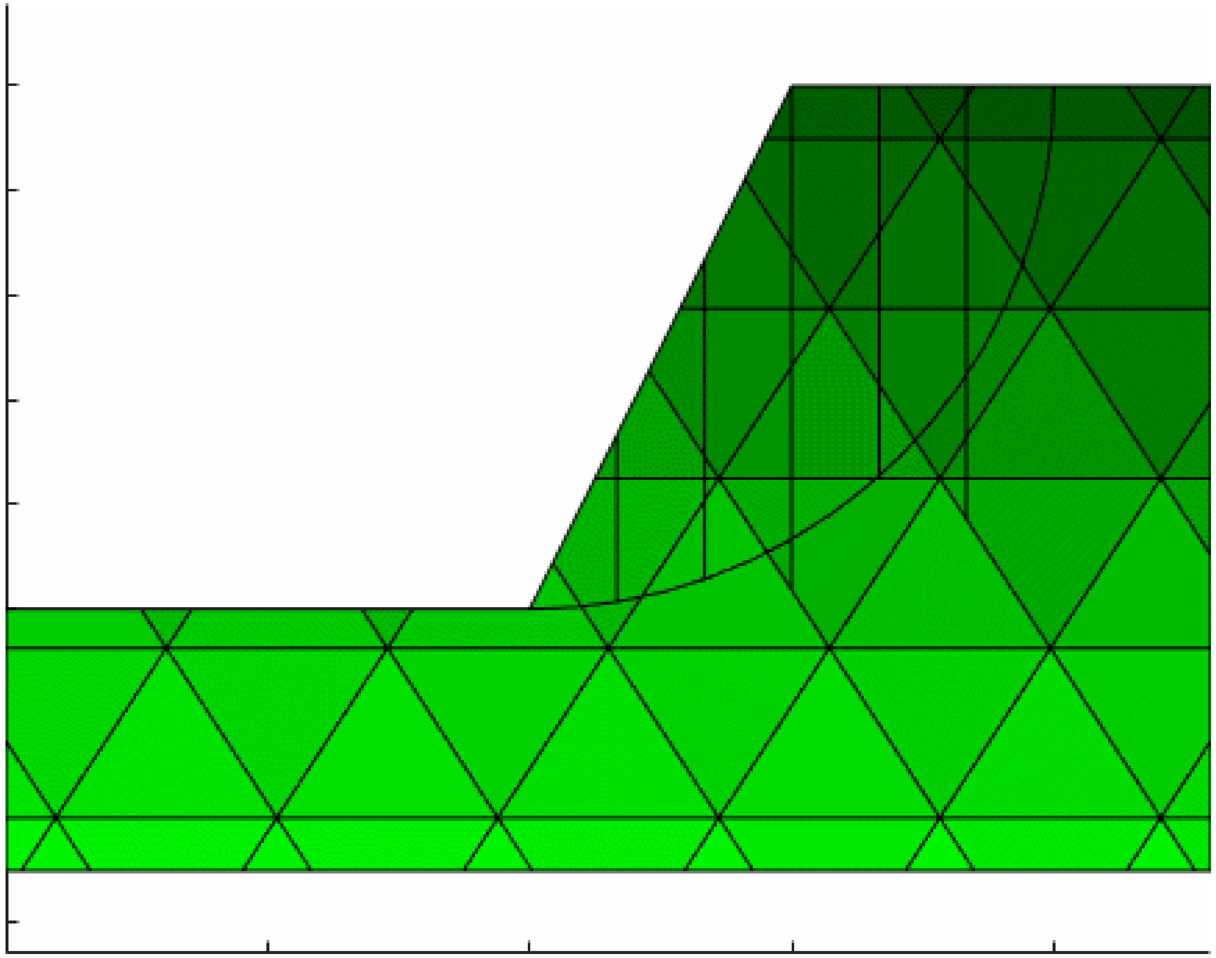
不同数值方法简介

非连续变形分析



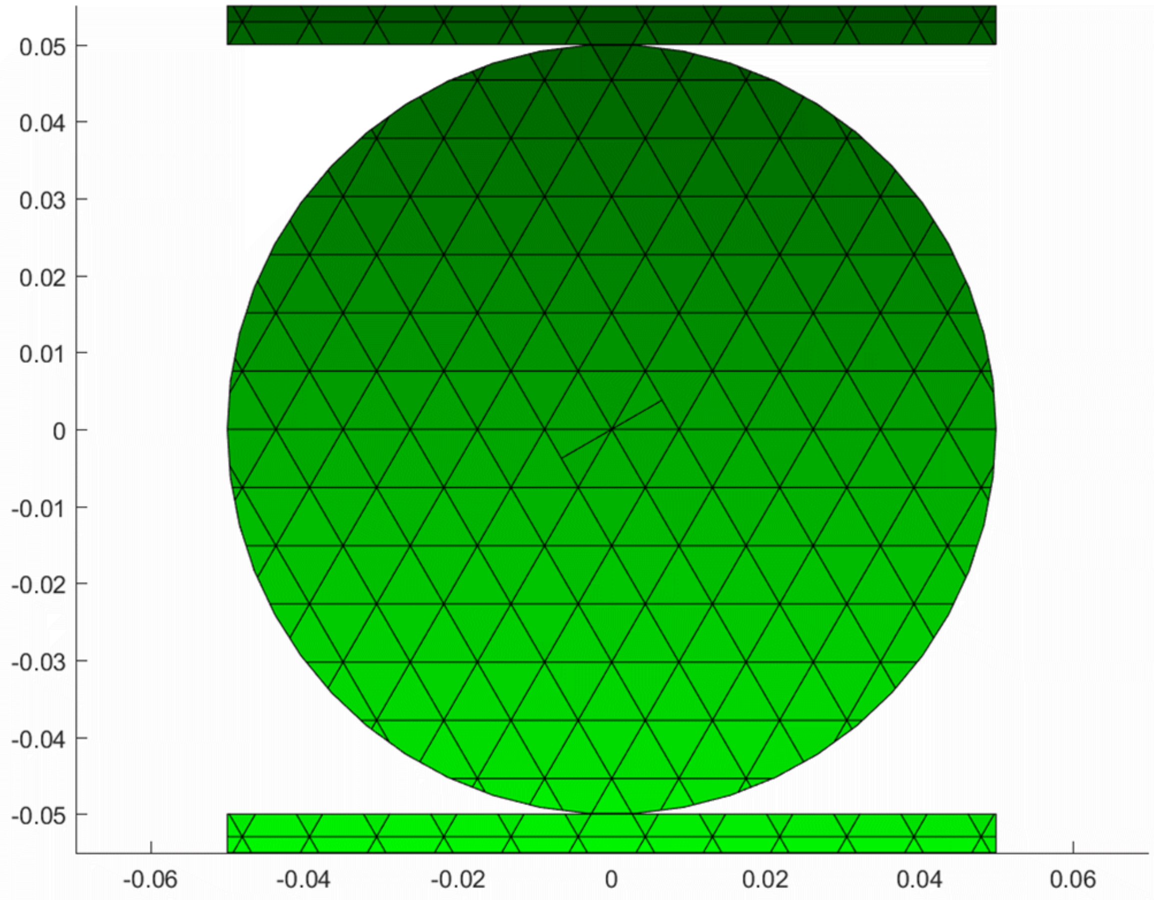
不同数值方法简介

数值流形法



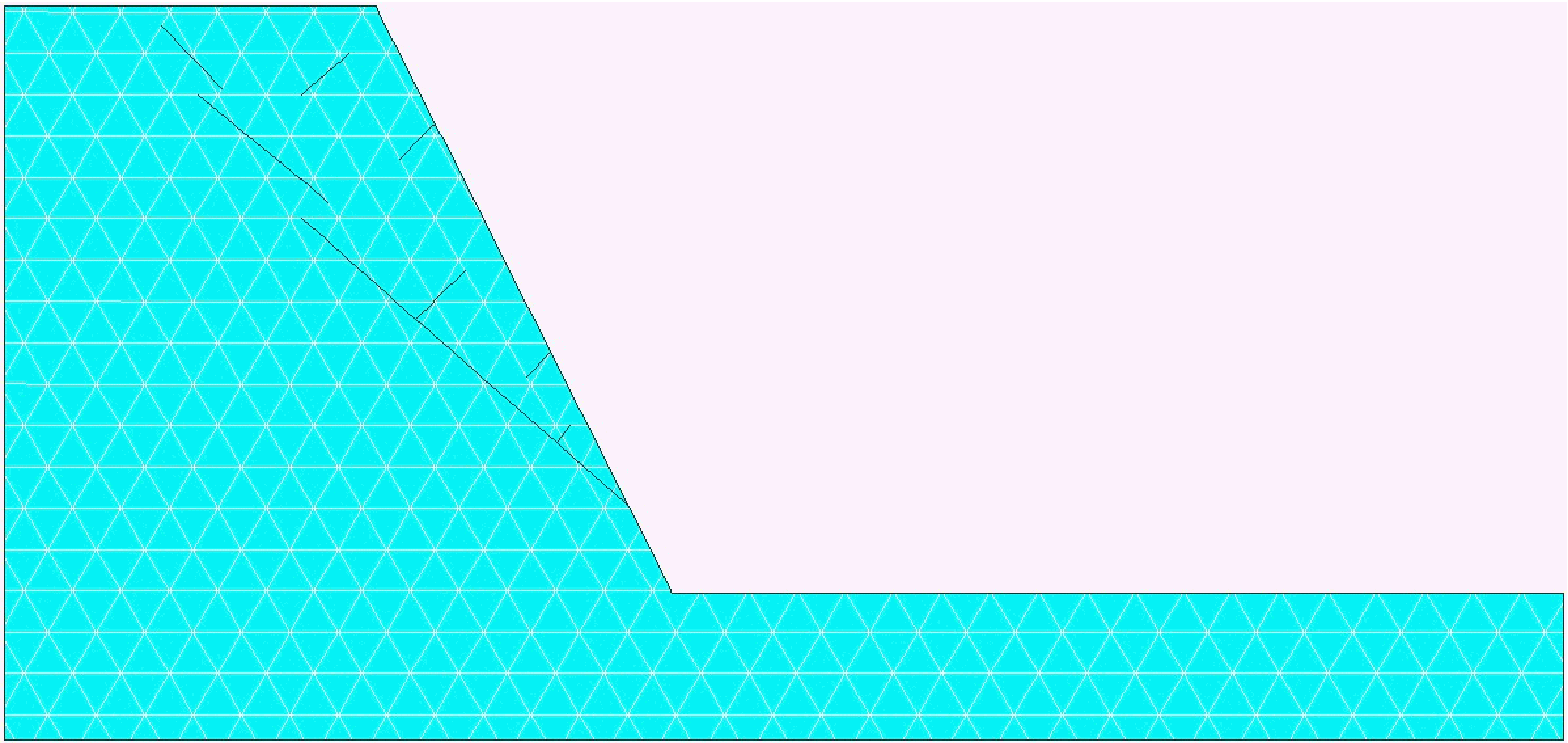
不同数值方法简介

数值流形法



不同数值方法简介

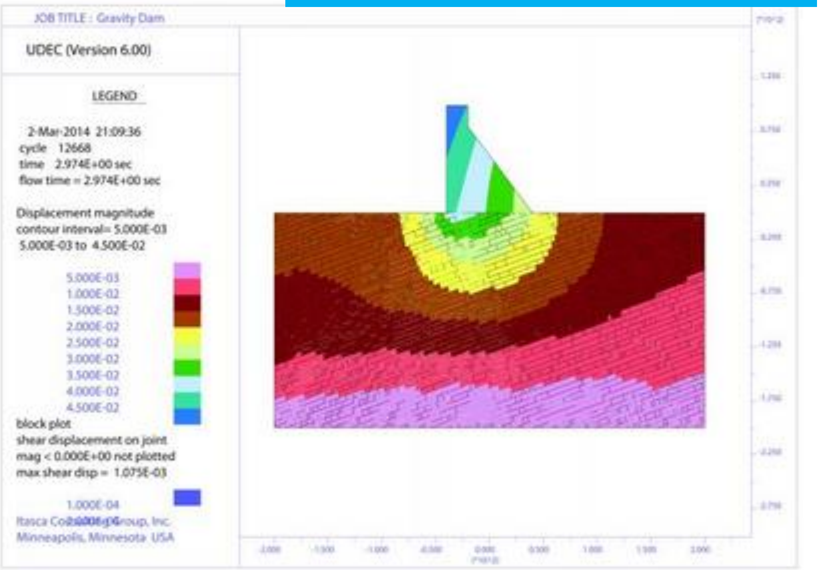
数值流形法

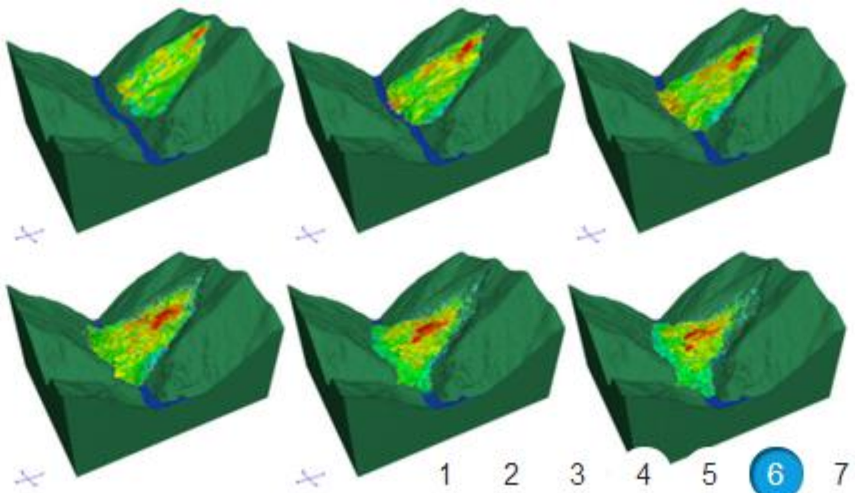


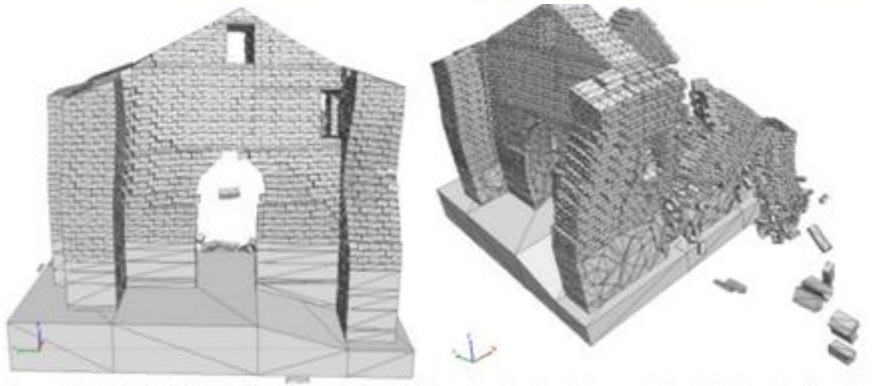
不同数值方法简介

离散单元法

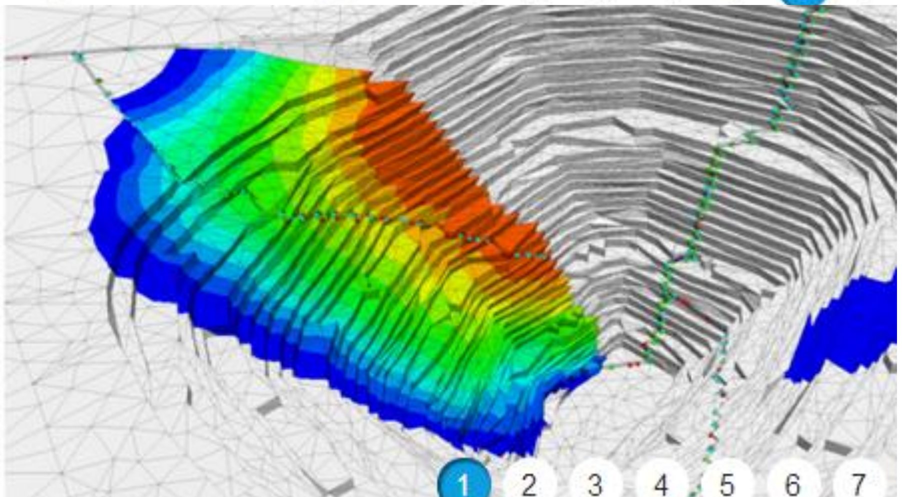
UDEC/3DEC ITASCA







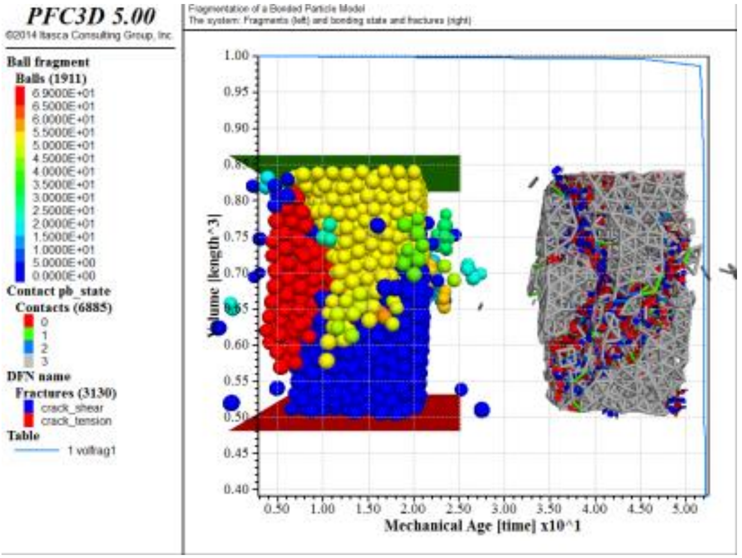
Zanotti, S. (2015). "Seismic Analysis of the Church of Kuño Tambo (Peru)" Master's Thesis, University of Minho.

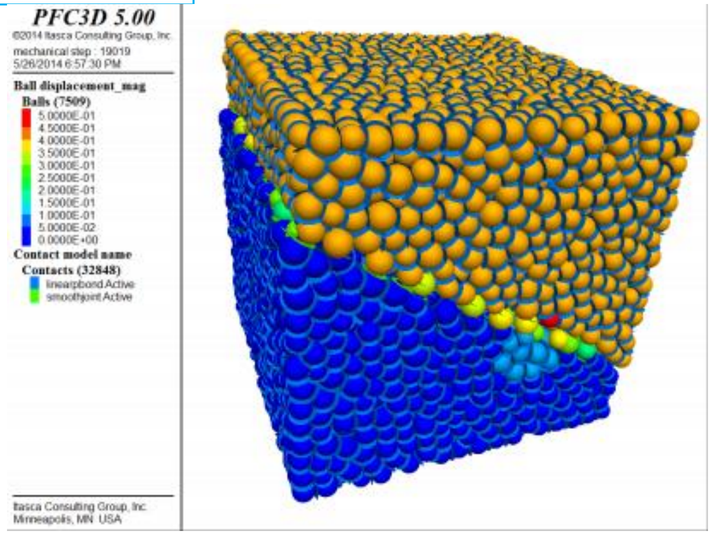


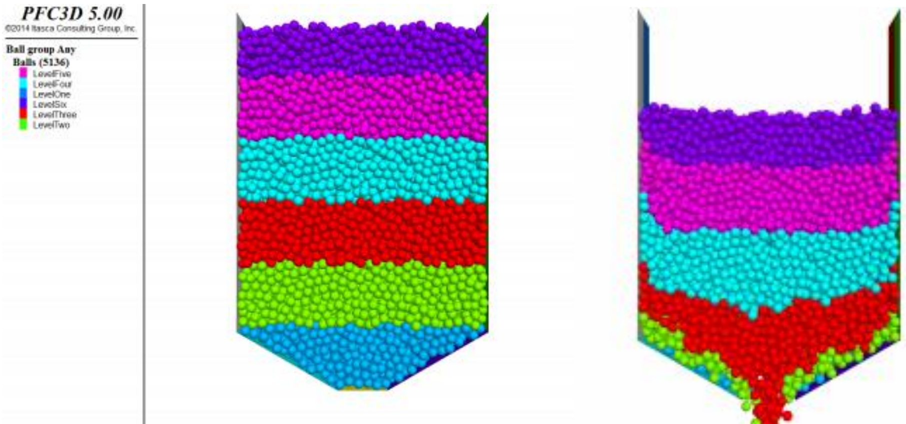
离散单元法

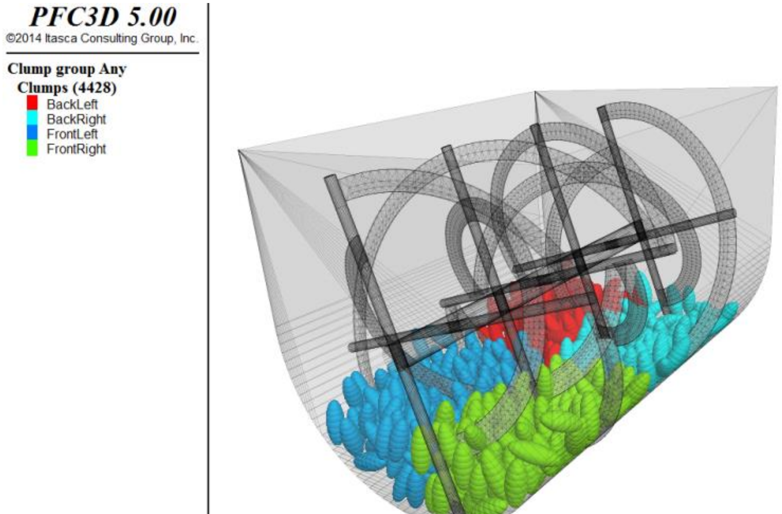
PFC(2D,3D)

ITASCA





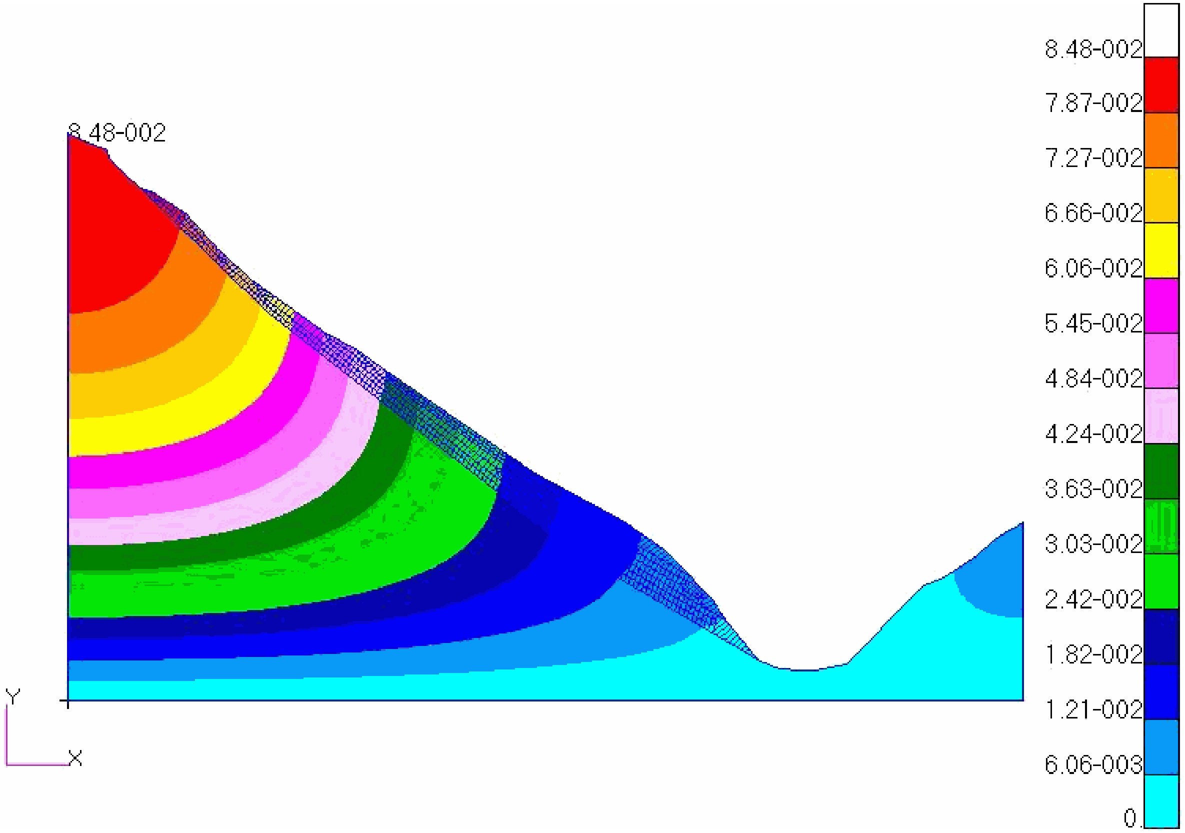




不同数值方法简介

离散单元法

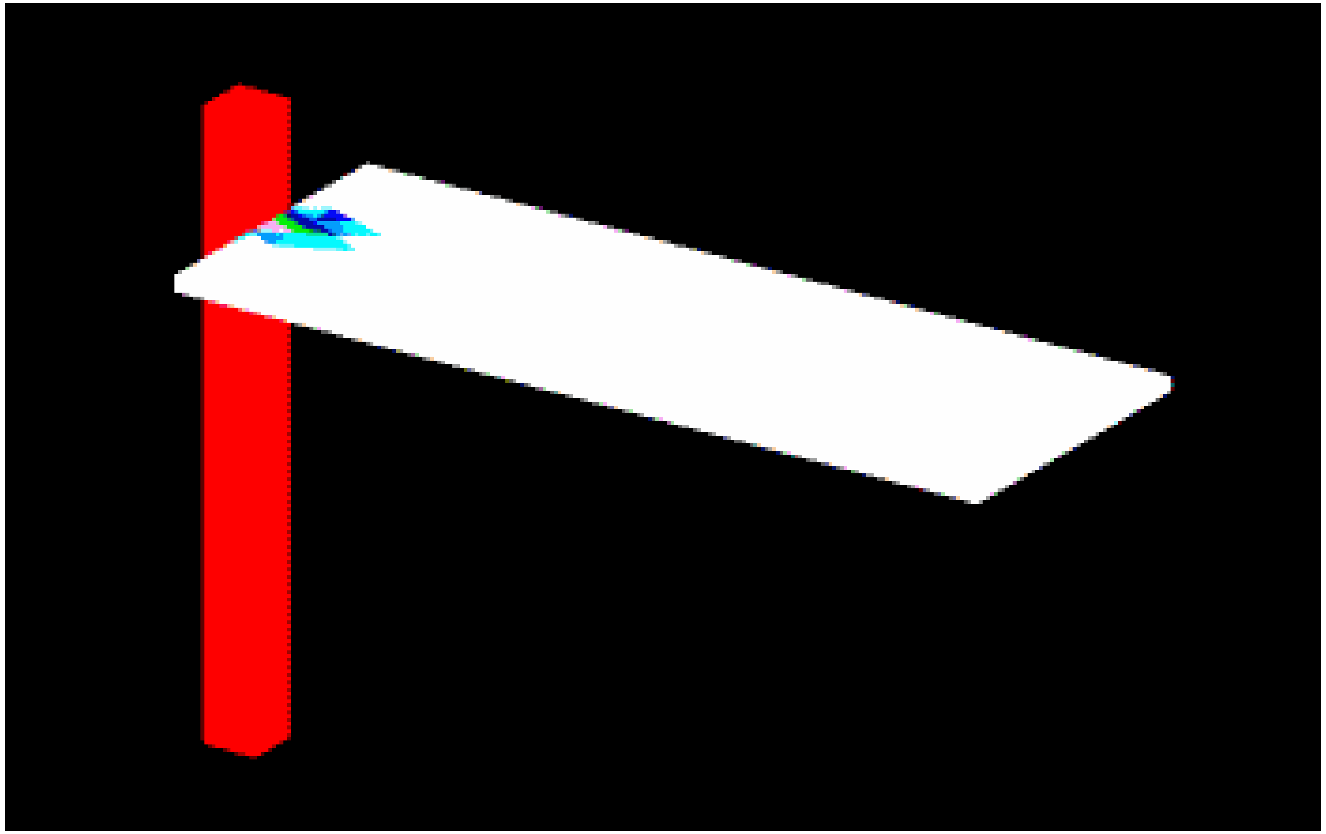
GDEM 北京极道成然科技有限公司



不同数值方法简介

离散单元法

GDEM 北京极道成然科技有限公司



大型软件应用

有限单元法（finite element method）

刘治军 青年研究员

土木工程系

liuzhijun@lzu.edu.cn

第2讲　杆系结构的直接法

本讲内容

2.1 引言

有限元方程一般是从偏微分方程出发，基于弱形式建立。但是简单的杆系结构可以在不知道偏微分方程和弱形式的前提下直接进行有限元分析。

Figure 2.1 A bridge truss.

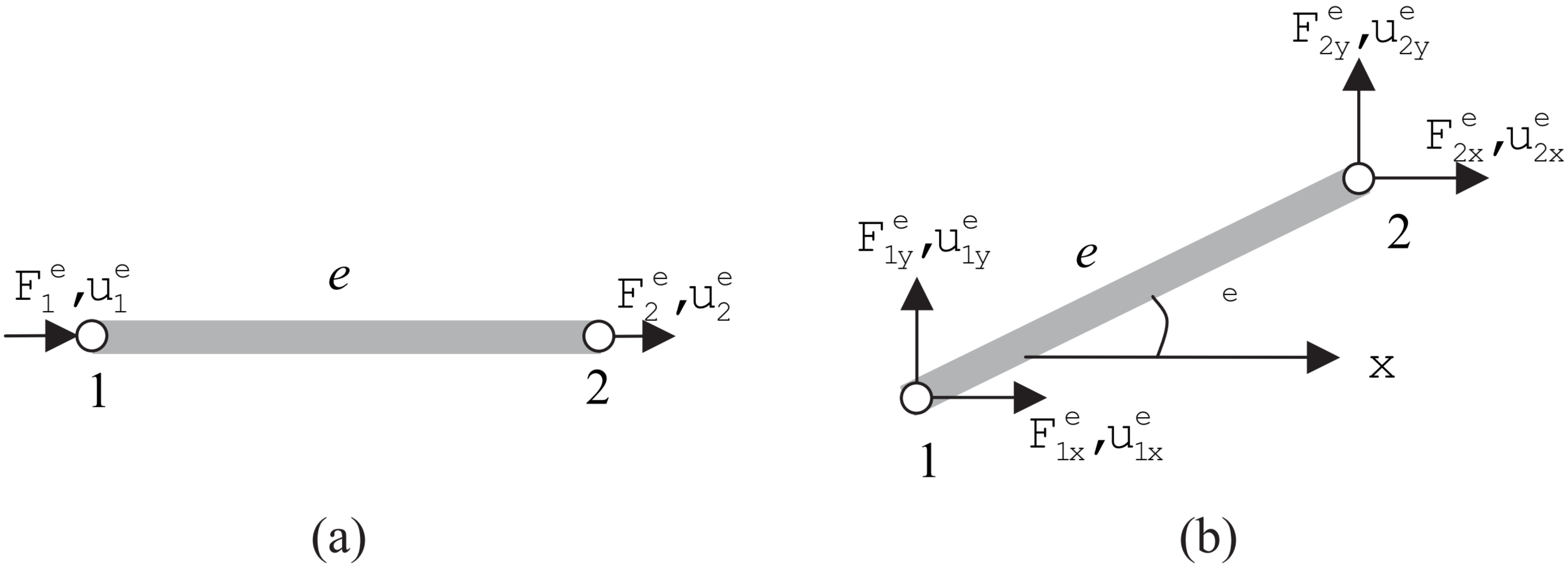
2.1 引言

Figure 2.1 A bridge truss.

杆单元：

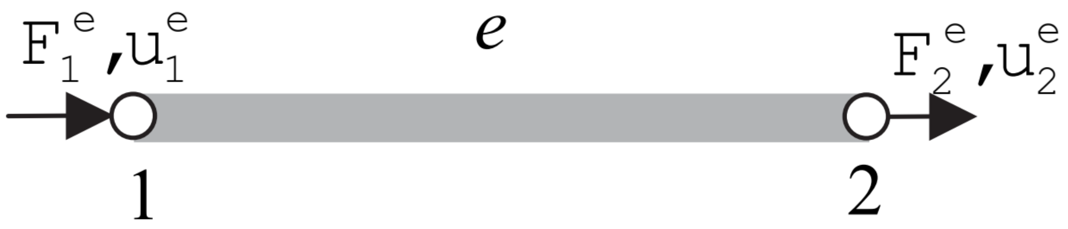
- 细长构件。
- 只能承受拉、压荷载，无法承受扭转、弯曲和剪切荷载。
- 受力情况跟弹簧类似。

2.2单个杆件分析(1维)



杆的构型、位移和节点力: (a)一维杆; (b)二维杆。

2.2单个杆件分析(1维)



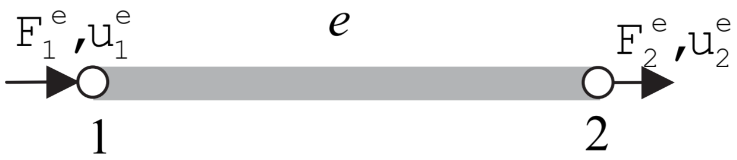
- 变量的上标表示单元，下标表示节点编号。
- 假定:直杆，横截面不变，服从胡克定律(Hooke’s law)。
- 单元参数:杨氏模量E^e, 横截面积A^e, 长度l^e 。

应力 $$\boxed{\sigma^e = \frac{p^e}{A^e}}$$

应力拉为正，压为负。

2.2单个杆件分析(1维)

控制方程
(governing equations)



平衡方程：单元所受节点力之和为0.

$$F_1^e + F_2^e = 0$$

本构方程：应力应变关系.

$$\sigma^e = E^e \varepsilon^e$$

几何方程：变形协调.

$$\varepsilon^e = \frac{\delta^e}{l^e}$$

2.2单个杆件分析(1维)

单元变形： $$\delta^e = u_2^e - u_1^e$$

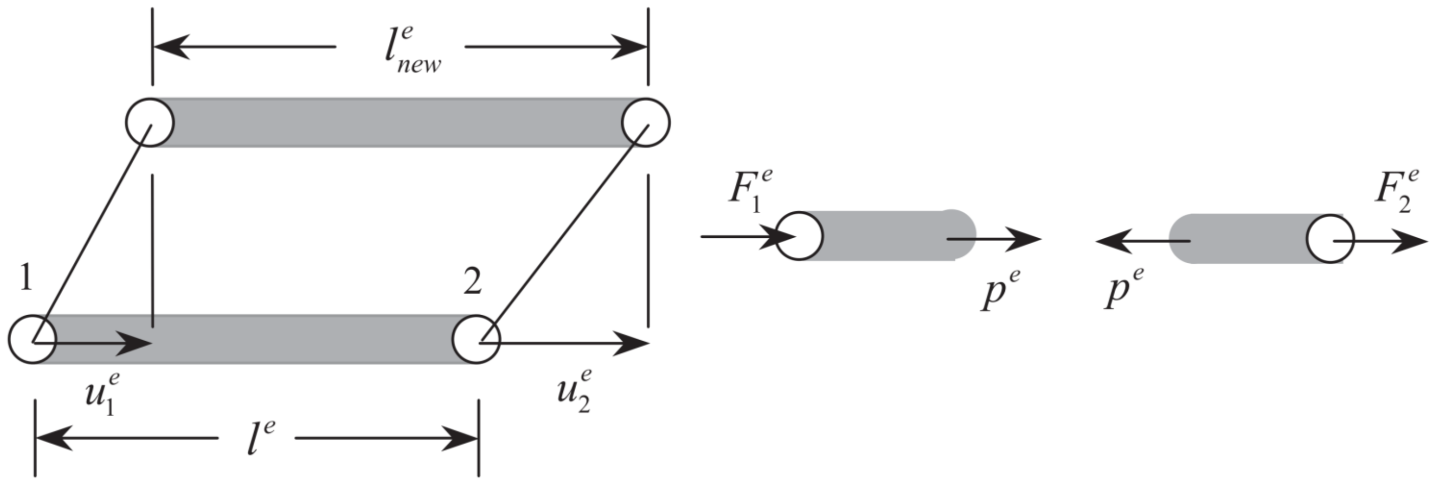
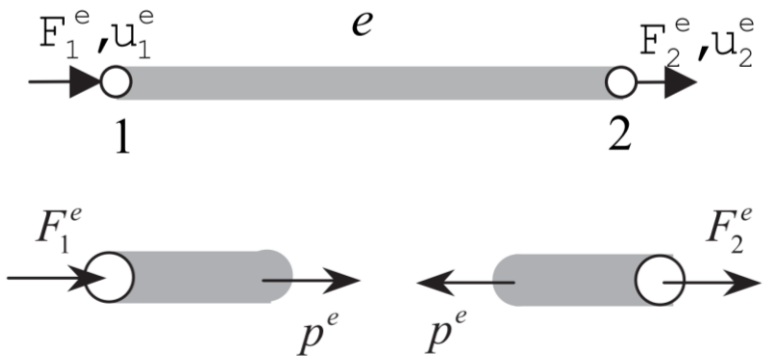


Figure 2.4 Elongation of an element and free-body diagrams, showing the positive sense of p^e and F_I^e.

- 注意节点力F^e和内力p^e（应力σ^e）的正负号区别。
- 节点力以坐标轴(x轴)正向为正，负向为负。
- 这里的节点力是作用在单元上的力（节点对单元的作用）。

2.2单个杆件分析(1维)

单元刚度矩阵
(elemental stiffness matrix)



$$
\begin{aligned}
F_2^e = p^e &= A^e \sigma^e \\
&= A^e E^e \varepsilon^e \\
&= A^e E^e \frac{\delta^e}{\ell^e}
\end{aligned}
$$

$$\delta^e = u_2^e - u_1^e$$

$$F_2^e = k^e (u_2^e - u_1^e)$$

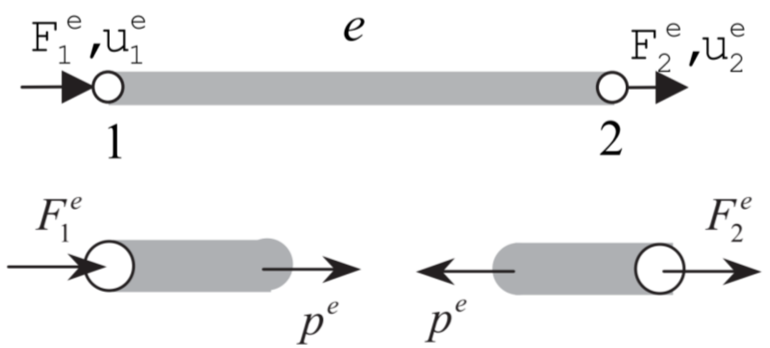
$$k^e = \frac{A^e E^e}{l^e}$$

平衡方程

$$F_1^e = -F_2^e = k^e (u_1^e - u_2^e)$$

2.2单个杆件分析(1维)

单元刚度矩阵
(elemental stiffness matrix)



$$F_2^e = k^e(u_2^e - u_1^e)$$

$$F_1^e = -F_2^e = k^e(u_1^e - u_2^e)$$

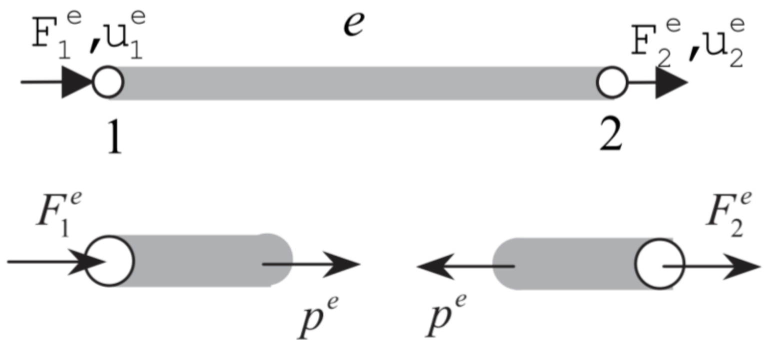
$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^e} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^e} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^e}$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{d}^e, \qquad \text{where} \quad \mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} = \frac{A^eE^e}{l^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

单元刚度方程

◆ $\mathbf{K}^e$:单元刚度矩阵,具有一般性。

2.2单个杆件分析(1维)



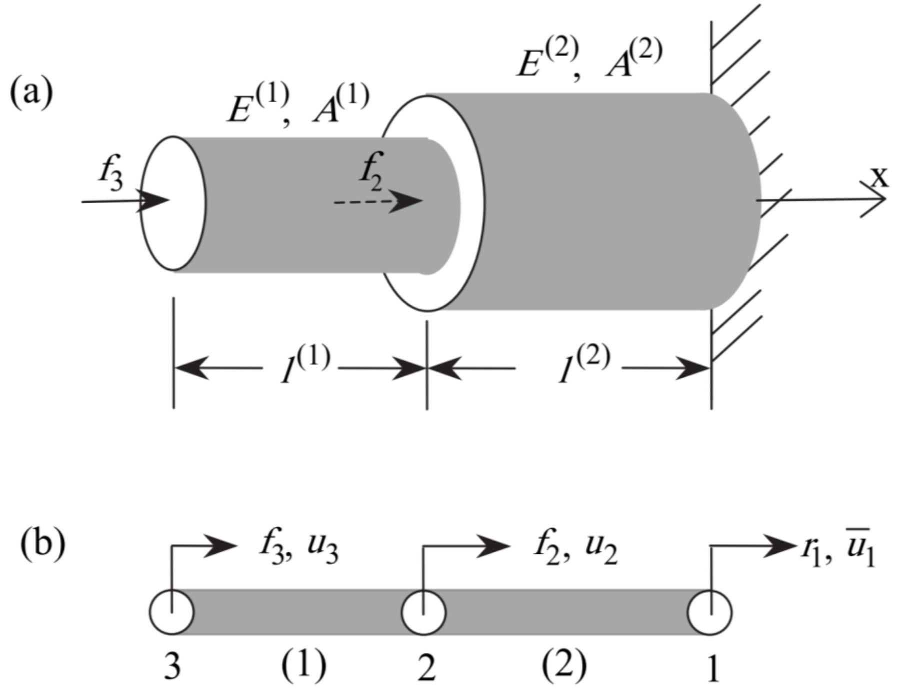
单元刚度矩阵
(elemental stiffness matrix)

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} = \frac{A^e E^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

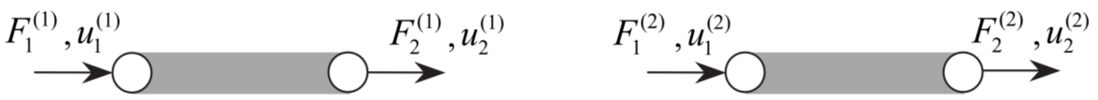
- 具有一般性。
- 对称矩阵。
- 半正定。
- 亏秩(奇异矩阵)。

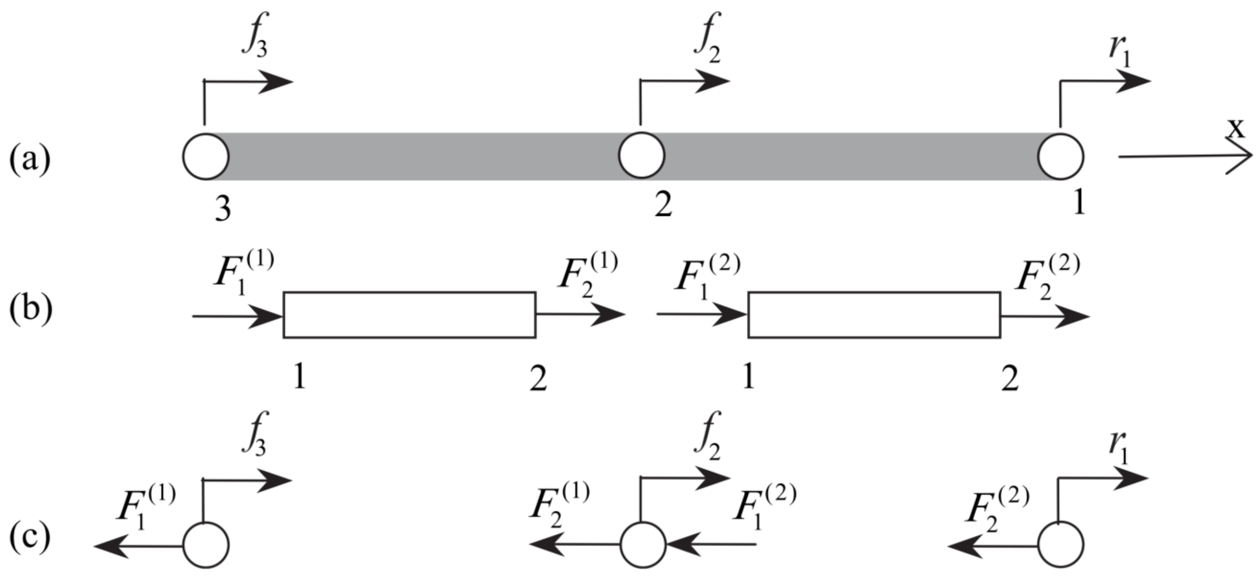
2.3杆系结构分析

- 如图所示的杆系结构中，每个节点上的外力和位移有且仅有一个已知，这点具有一般性。推广到多维有限元分析中：对于每个节点，每个方向的外力和位移有且仅有一个已知。



2.3杆系结构分析





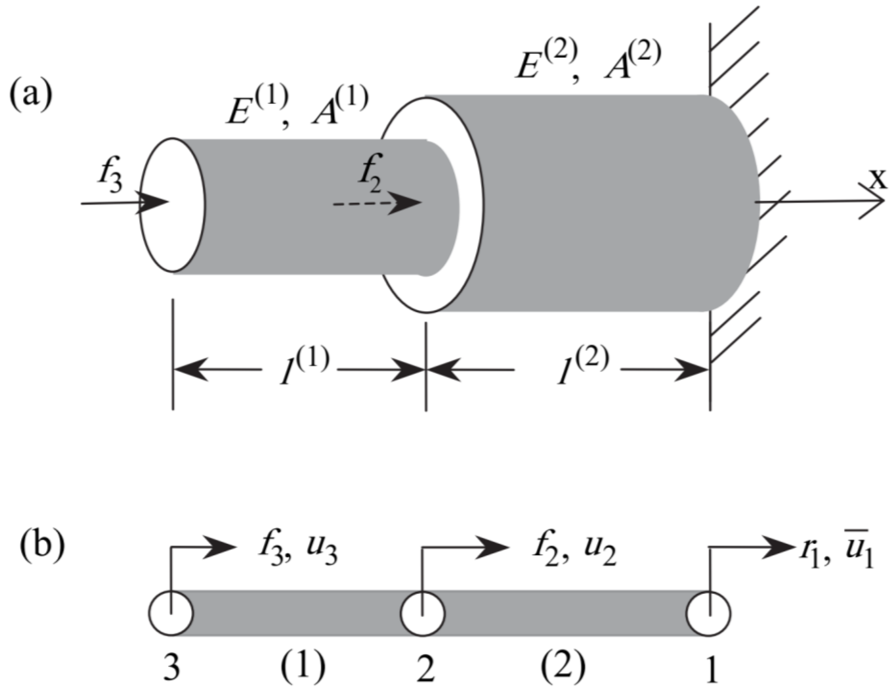
(a)系统；(b)单元的脱离体图（图中内力为节点对单元的作用)；(c)节点脱离体图（图中内力为单元对节点的作用）。

■ 根据节点的受力平衡建立系统方程组。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

■ 注意节点整体编号与局部编号的区别。局部编号始终为1和2，整体编号可以任意取，只要保证采用从1开始的连续整数即可。

2.3杆系结构分析

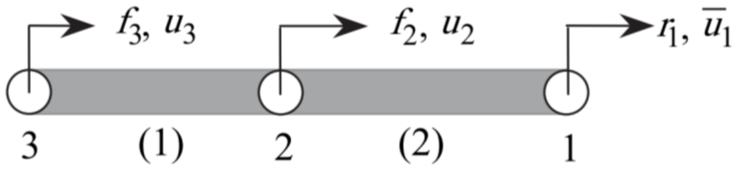


- 将结构分为两个杆单元，每个杆单元的刚度方程和单一杆的相同。

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{d}^e \qquad \text{or} \qquad \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix} = \frac{A^e E^e}{l^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3杆系结构分析



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

- 单元刚度方程：

（1） $$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

（2） $$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

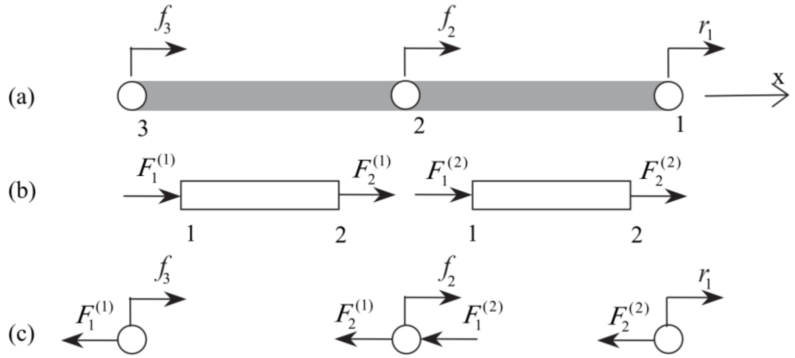
放大

调整顺序

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

2.3杆系结构分析



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}}$$

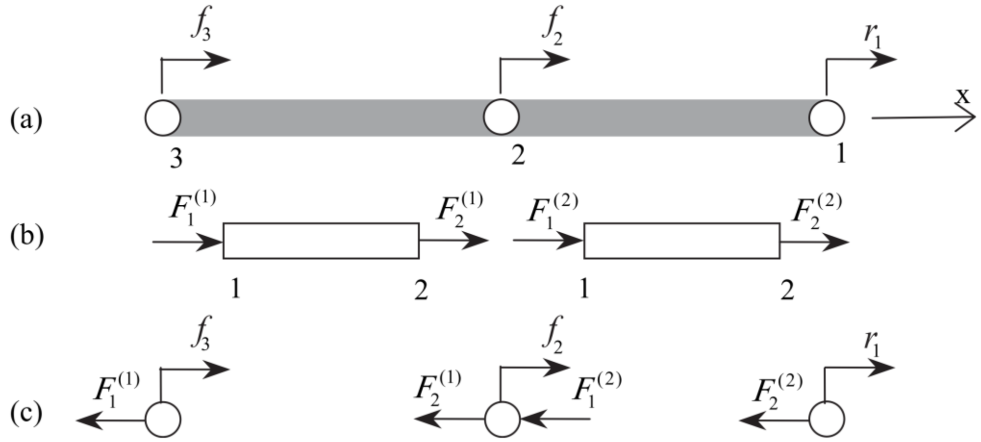
$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

系统方程组

$$\boxed{(\tilde{\mathbf{K}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{K}}^{(2)})\mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r}}$$

2.3杆系结构分析



$$\boxed{(\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}+\tilde{\mathbf{K}}^{(2)})\mathbf{d}=\mathbf{f}+\mathbf{r}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}^{(2)}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

系统刚度矩阵

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{2}\tilde{\mathbf{K}}^{e}=\begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$

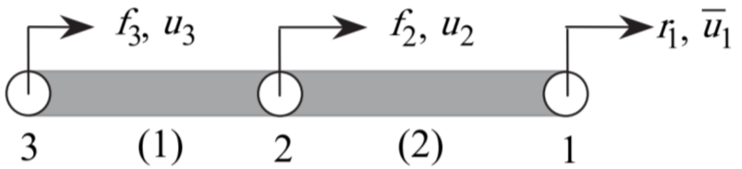
- ◆ 对称。
- ◆ 半正定。
- ◆ 亏秩(奇异)。

2.3杆系结构分析

计算系统刚度矩阵的过程：

- 计算每个单元刚度矩阵，并根据单元节点的总体编号将单元刚度矩阵放大并调整每个元素位置。
- 放大后的单元刚度矩阵相加得到系统刚度矩阵。

2.3杆系结构分析



■ 放大。

单元(1)，节点总体编号为3和2：

$$\begin{array}{cc} \text{K33} & \text{K32} \\ \end{array}$$
$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \text{K23} & \text{K22} \\ \end{array}$$

单元(2)，节点总体编号为2和1：

$$\begin{array}{cc} \text{K22} & \text{K21} \\ \end{array}$$
$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \text{K12} & \text{K11} \\ \end{array}$$

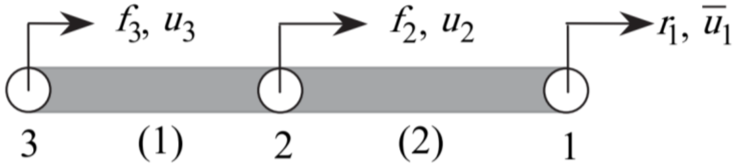
■ 相加。

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{2} \tilde{\mathbf{K}}^{e} = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$

◆ 熟练后上述两个步骤可以一步完成，有限元中叫做组装(assemble)，程序开发中就是如此。

2.3杆系结构分析

矩阵形式表示的组装(assemble)过程



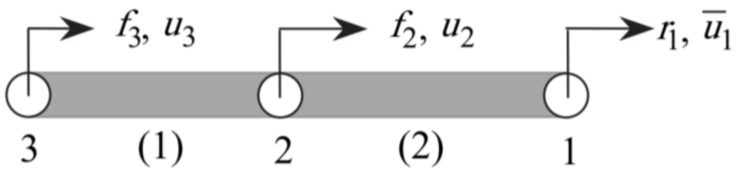
$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(1)}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(1)}\mathbf{d}, \qquad \mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(2)}} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{(2)}\mathbf{d}$$

$$\boxed{\mathbf{d}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{d}}$$

$$\mathbf{K}^e \mathbf{L}^e \mathbf{d} = \mathbf{F}^e$$

2.3杆系结构分析

矩阵形式表示的组装过程



$$\mathbf{d}^{(1)}=\begin{bmatrix}u_1^{(1)}\\u_2^{(1)}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(1)}}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{d},\qquad \mathbf{d}^{(2)}=\begin{bmatrix}u_1^{(2)}\\u_2^{(2)}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}}_{\mathbf{L}^{(2)}}\begin{bmatrix}\bar{u}_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{d}$$

L^e用于放大单元位移，
L^{eT}用于放大单元节点力。

$$\boldsymbol{L}^e\,\boldsymbol{L}^{eT}=\boldsymbol{I}$$

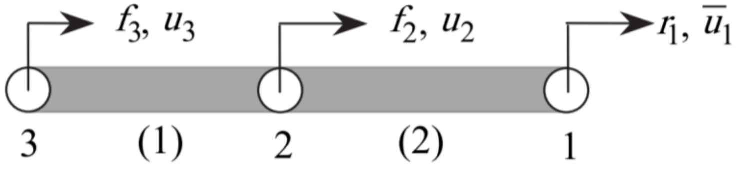
$$\begin{bmatrix}0\\F_2^{(1)}\\F_1^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1^{(1)}\\F_2^{(1)}\end{bmatrix}=\mathbf{L}^{(1)\mathrm{T}}\mathbf{F}^{(1)}\qquad \begin{bmatrix}F_2^{(2)}\\F_1^{(2)}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1^{(2)}\\F_2^{(2)}\end{bmatrix}=\mathbf{L}^{(2)\mathrm{T}}\mathbf{F}^{(2)}$$

$$\mathbf{L}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}^e\mathbf{L}^e\mathbf{d}=\mathbf{L}^{e\mathrm{T}}\mathbf{F}^e$$

- 可验证：方程左端即前面得到的放大后的刚度方程一侧。

2.3杆系结构分析

矩阵形式表示的组装过程



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_1^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}^{(2)}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

$$\sum_{e=1}^{2} \mathbf{L}^{e\mathrm{T}} \mathbf{F}^{e} = \mathbf{f} + \mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{r}}$$

$$\boxed{\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{e\mathrm{T}} \mathbf{K}^{e} \mathbf{L}^{e}}$$

放大后的单元刚度矩阵

$$\tilde{\mathbf{K}}^{e} = \mathbf{L}^{e\mathrm{T}} \mathbf{K}^{e} \mathbf{L}^{e}$$

2.3杆系结构分析

本质/位移/Dirichlet边界条件施加（prescribe essential boundary conditions）和方程组求解

$$\boxed{\mathbf{Kd} = \mathbf{f} + \mathbf{r}}$$

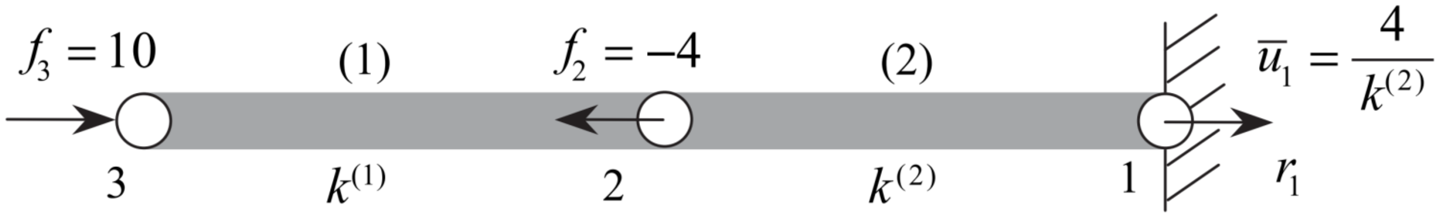
$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{2} \tilde{\mathbf{K}}^e = \begin{bmatrix} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}$$

- 由于系数矩阵奇异，方程组无法求解(有无穷多解)。

2.3杆系结构分析

本质边界条件施加和方程组求解A：减小方程数目。

考虑如图系统：



$$\left[\begin{array}{c:cc} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ \hdashline -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \hdashline u_2 \\ u_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} r_1 \\ \hdashline -4 \\ 10 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{E}} & \mathbf{K}_{\mathrm{EF}} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}} \\ \mathbf{d}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{E}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}$$

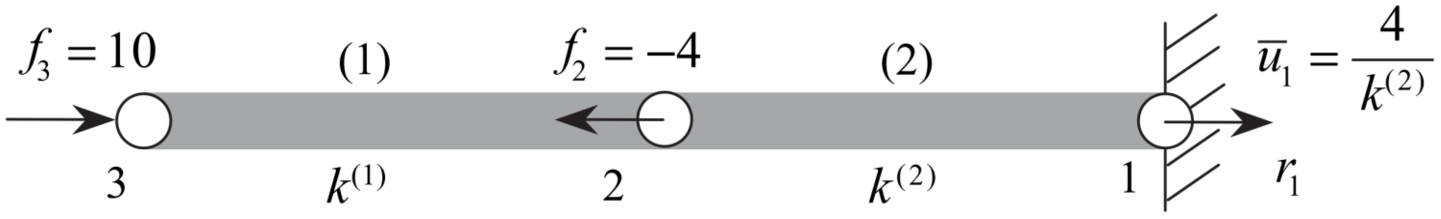
$$\mathbf{K}_{\mathrm{E}}=[k^{(2)}],\qquad \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}=[-k^{(2)}\ \ 0],\qquad \mathbf{K}_{\mathrm{F}}=\begin{bmatrix} k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{E}}=[r_1],\qquad \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}}=[\bar{u}_1]=[4/k^{(2)}],\qquad \mathbf{f}_{\mathrm{F}}=\begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix},\qquad \mathbf{d}_{\mathrm{F}}=\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

2.3杆系结构分析

本质边界条件施加和方程组求解A：减小方程数目。

考虑如图系统：



$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{E}} & \mathbf{K}_{\mathrm{EF}} \\ \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}} \\ \mathbf{d}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\mathrm{E}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{\mathrm{EF}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}} + \mathbf{K}_{\mathrm{F}} \mathbf{d}_{\mathrm{F}} = \mathbf{f}_{\mathrm{F}}$$

- 改变了方程数目，程序中不便采用。

- 未知量（unknowns）求解

$$\mathbf{d}_{\mathrm{F}} = \mathbf{K}_{\mathrm{F}}^{-1}(\mathbf{f}_{\mathrm{F}} - \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}})$$

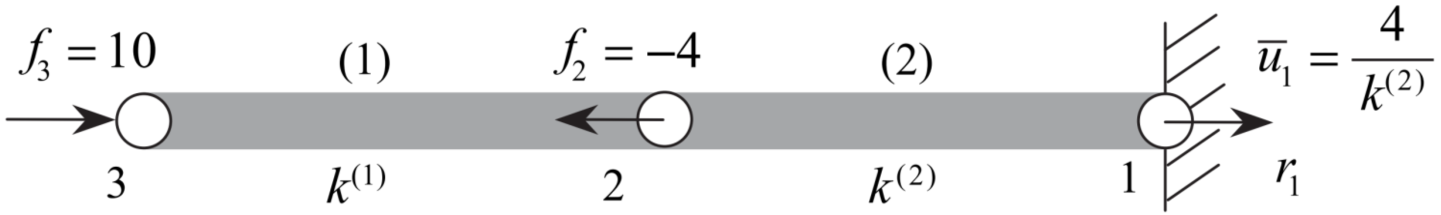
- 支反力（reaction force）

$$\mathbf{r}_{\mathrm{E}} = \mathbf{K}_{\mathrm{E}} \bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}} + \mathbf{K}_{\mathrm{EF}} \mathbf{d}_{\mathrm{F}}$$

2.3杆系结构分析

本质边界条件施加和方程组求解A：减小方程数目。

考虑如图系统：



$$\mathbf{d}_{\mathrm{F}} = \mathbf{K}_{\mathrm{F}}^{-1}(\mathbf{f}_{\mathrm{F}} - \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}})$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix} [4/k^{(2)}] \right\}$$

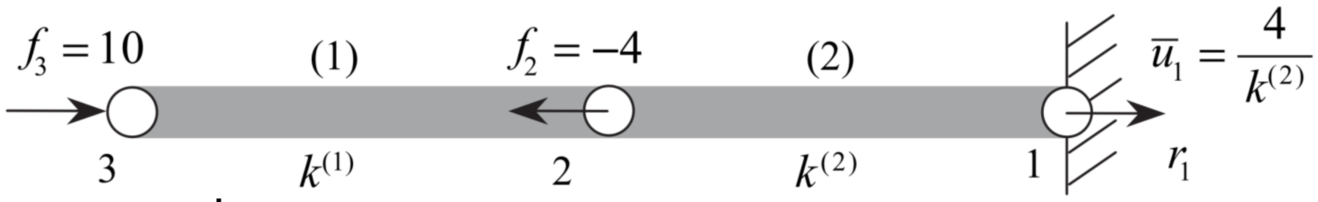
$$u_2 = \frac{10}{k^{(2)}}, \qquad u_3 = 10\left(\frac{1}{k^{(1)}} + \frac{1}{k^{(2)}}\right)$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{E}} = \mathbf{K}_{\mathrm{E}}\bar{\mathbf{d}}_{\mathrm{E}} + \mathbf{K}_{\mathrm{EF}}\mathbf{d}_{\mathrm{F}}$$

$$r_1 = -6.$$

2.3杆系结构分析

本质边界条件施加B：修改方程，已知量移到方程右端。



$$\left[\begin{array}{c|cc} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ \hline -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \hline u_2 \\ u_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} r_1 \\ \hline -4 \\ 10 \end{array}\right]$$

- **新方程与原方程等价；**
- **新的刚度矩阵对称、正定。**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ -4-(-k^{(2)})\bar{u}_1 \\ 10-(0)\bar{u}_1 \end{bmatrix}$$

1. 已知节点位移乘以对应列移到方程右端(添加负号)。
2. 已知位移对应的行列对角元变为1，其他刚度元素变为0。
3. 已知位移对应的方程右端变为已知位移。

2.3杆系结构分析

本质边界条件施加C：对角元素置大数/罚函数法(penalty)。

$$\left[\begin{array}{c|cc} k^{(2)} & -k^{(2)} & 0 \\ \hline -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \bar{u}_1 \\ \hline u_2 \\ u_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} r_1 \\ \hline -4 \\ 10 \end{array}\right]$$

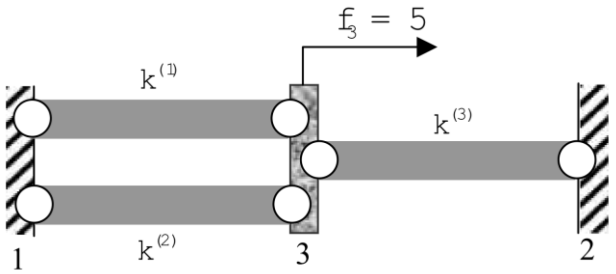
已知位移对应的刚度矩阵对角元素修改为大数β。

$$\begin{bmatrix} \beta & -k^{(2)} & 0 \\ -k^{(2)} & k^{(1)}+k^{(2)} & -k^{(1)} \\ 0 & -k^{(1)} & k^{(1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta\bar{u}_1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- **新方程与原方程不等价，只有当趋近无穷大时二者等价、能得到精确解；**
- **过大的参数导致刚度矩阵条件数很大、奇异，方程难以求解。**
- **最优的参数难以选择。**

2.3杆系结构分析

算例



单元刚度矩阵：

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{K}^{(1)} = \end{array}\begin{array}{cc} [1] & [3] \\ \left[\begin{array}{cc} k^{(1)} & -k^{(1)} \\ -k^{(1)} & k^{(1)} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ [1] \\ [3] \end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ \mathbf{K}^{(2)} = \end{array}\begin{array}{cc} [1] & [3] \\ \left[\begin{array}{cc} k^{(2)} & -k^{(2)} \\ -k^{(2)} & k^{(2)} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ [1] \\ [3] \end{array}, \quad \begin{array}{c} \\ \mathbf{K}^{(3)} = \end{array}\begin{array}{cc} [3] & [2] \\ \left[\begin{array}{cc} k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(3)} & k^{(3)} \end{array}\right] \end{array}$$

系统刚度矩阵、自由度向量和右端项：

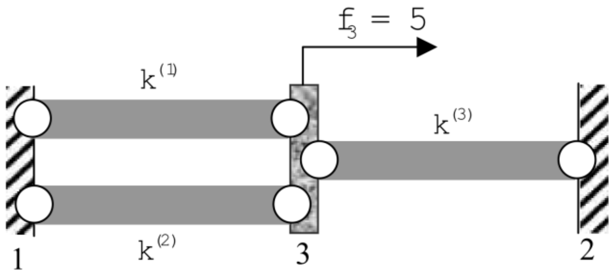
$$\mathbf{K} = \begin{array}{ccc} [1] & [2] & [3] \\ \left[\begin{array}{ccc} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ [1] \\ [2] \\ [3] \end{array} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

系统方程组：

$$\begin{bmatrix} k^{(1)} + k^{(2)} & 0 & -k^{(1)} - k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ -k^{(1)} - k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)} + k^{(2)} + k^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.3杆系结构分析

算例

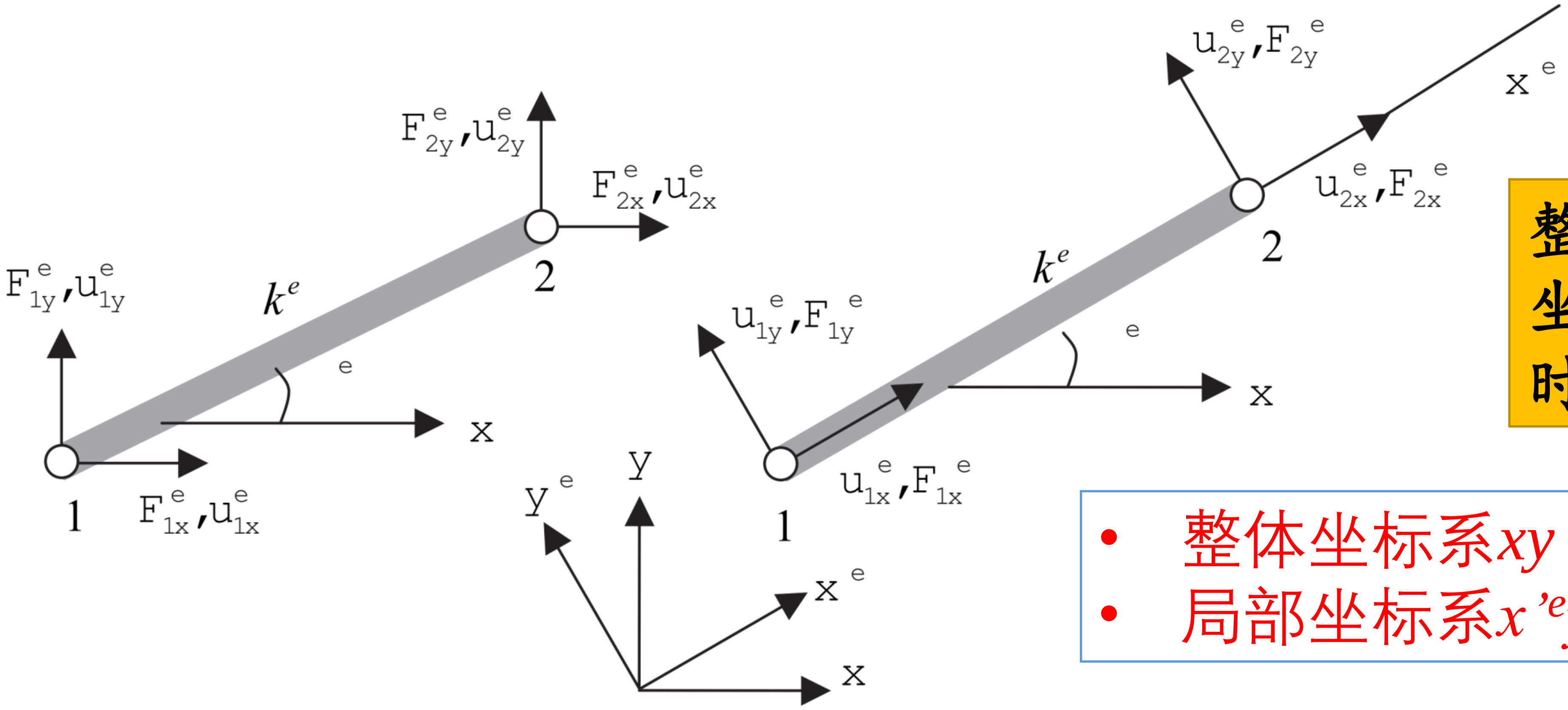


$$\left[\begin{array}{cc:c} k^{(1)}+k^{(2)} & 0 & -k^{(1)}-k^{(2)} \\ 0 & k^{(3)} & -k^{(3)} \\ \hdashline -k^{(1)}-k^{(2)} & -k^{(3)} & k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline u_3 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \hdashline 5 \end{array}\right]$$

用前面方法B施加本质边界条件。

$$(k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)})u_3 = 5 \quad \Longrightarrow \quad u_3 = \frac{5}{k^{(1)}+k^{(2)}+k^{(3)}}$$

2.4 二维桁架



整体坐标系到局部坐标系的转角以逆时针方向为正。

- 整体坐标系xy
- 局部坐标系$x'^e y'^e$

$$\mathbf{F}^e = [F^e_{1x}\ F^e_{1y}\ F^e_{2x}\ F^e_{2y}]^{\mathrm{T}} \xleftrightarrow[\text{联系二者}]{\text{刚度矩阵}} \mathbf{d}^e = [d^e_{1x}\ d^e_{1y}\ d^e_{2x}\ d^e_{2y}]^{\mathrm{T}}$$

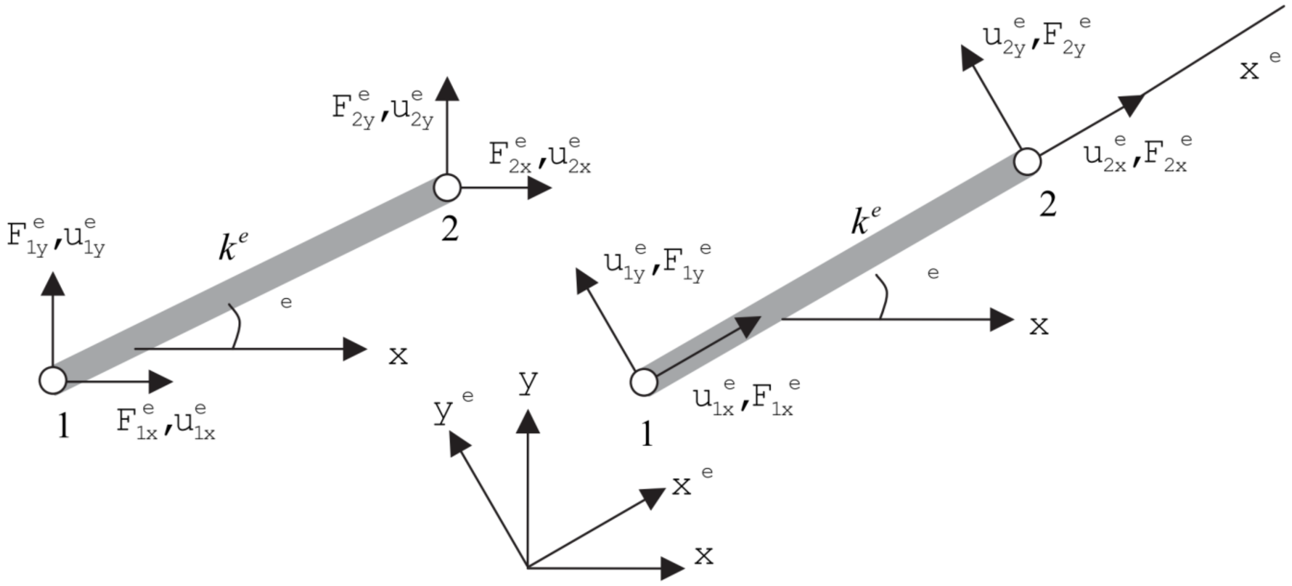
2.4 二维桁架

- 局部坐标系中的刚度方程同一维情况一样。

$$\begin{bmatrix} k^e & -k^e \\ -k^e & k^e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1x}^{\prime e} \\ u_{2x}^{\prime e} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{1x}^{\prime e} \\ F_{2x}^{\prime e} \end{bmatrix}$$

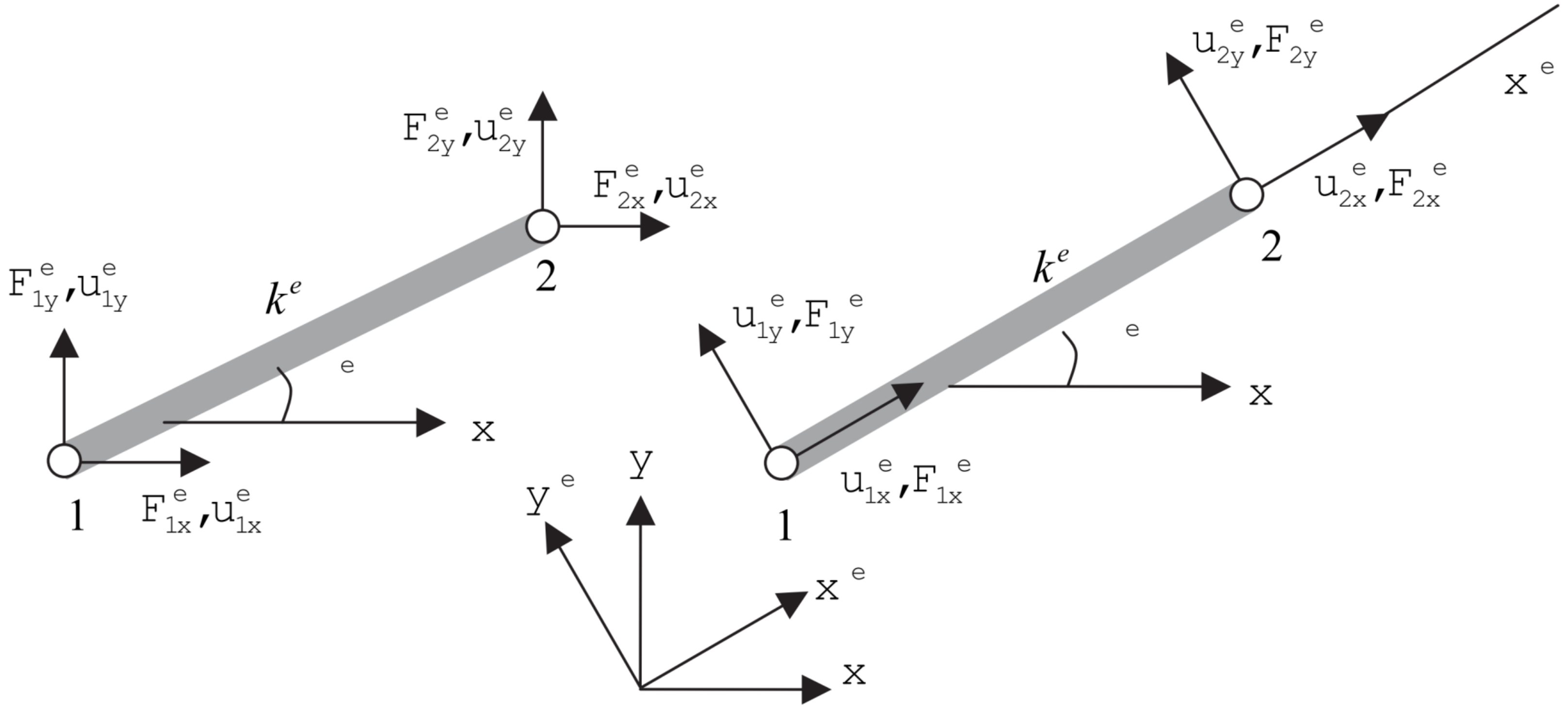
扩充

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{1x}^{\prime e} \\ F_{1y}^{\prime e} \\ F_{2x}^{\prime e} \\ F_{2y}^{\prime e} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}^{\prime e}}=\underbrace{k^e\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{\prime e}}\underbrace{\begin{bmatrix} u_{1x}^{\prime e} \\ u_{1y}^{\prime e} \\ u_{2x}^{\prime e} \\ u_{2y}^{\prime e} \end{bmatrix}}_{\mathbf{d}^{\prime e}}$$



$$\mathbf{F}^{\prime e}=\mathbf{K}^{\prime e}\mathbf{d}^{\prime e}$$

2.4 二维桁架



整体坐标系到局部坐标系的转角以逆时针方向为正。

根据向量分量的坐标转换关系得到：

$$u'^e_{Ix} = u^e_{Ix} \cos \phi^e + u^e_{Iy} \sin \phi^e$$

$$u'^e_{Iy} = -u^e_{Ix} \sin \phi^e + u^e_{Iy} \cos \phi^e$$

2.4 二维桁架

坐标转换关系

一阶张量(向量)**u**在两个坐标系xoy和x’oy’中的坐标变换。基向量分别为$\vec{e}_i$和$\vec{e}_{i'}$。坐标分别为u_i和$u_{i'}$

$$u_k = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

$$u_i \vec{e}_i = u_{i'} \vec{e}_{i'}$$

$$\left(u_i \vec{e}_i\right) \cdot \vec{e}_k = \left(u_{i'} \vec{e}_{i'}\right) \cdot \vec{e}_k$$

$$\left(u_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right) = \left(u_{i'} \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_k\right)$$

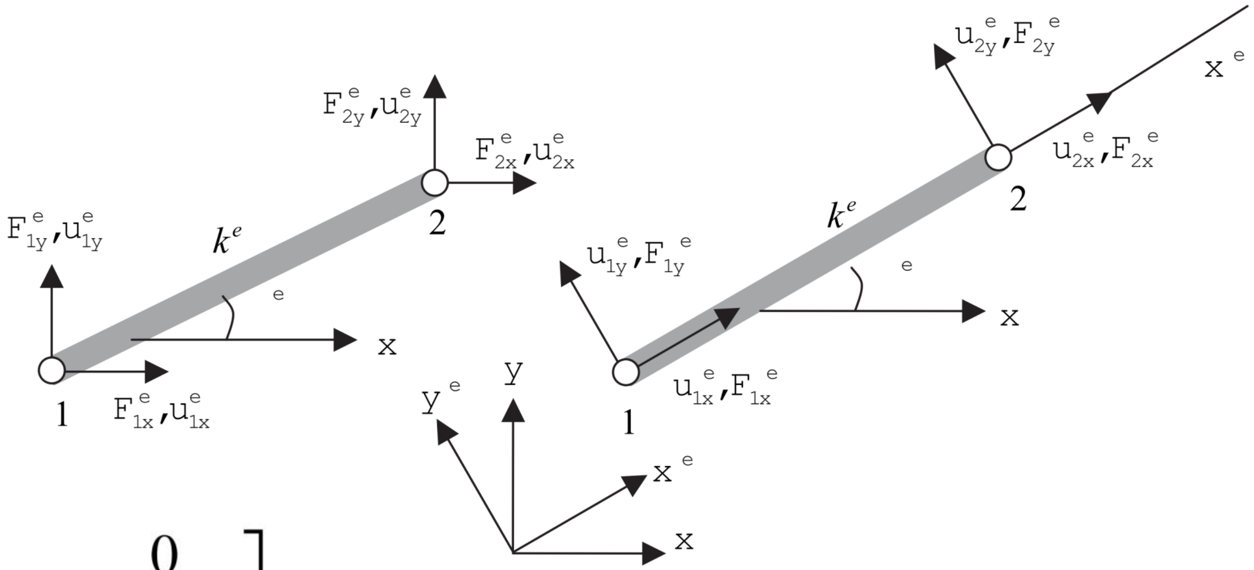
$$u_i \delta_{ik} = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

$$u_k = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

2.4 二维桁架

$$\mathbf{d}'^{e} = \mathbf{R}^{e}\mathbf{d}^{e}$$

正交矩阵



$$\mathbf{d}^{e} = \begin{bmatrix} u^e_{1x} \\ u^e_{1y} \\ u^e_{2x} \\ u^e_{2y} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R}^{e} = \begin{bmatrix} \cos\phi^e & \sin\phi^e & 0 & 0 \\ -\sin\phi^e & \cos\phi^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi^e & \sin\phi^e \\ 0 & 0 & -\sin\phi^e & \cos\phi^e \end{bmatrix}$$

整个$\mathbf{R}^e$同样是正交矩阵。

$$(\mathbf{R}^{e})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{e} = \mathbf{R}^{e}(\mathbf{R}^{e})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{d}'^{e} = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{R}^{e}\mathbf{d}^{e} = \mathbf{d}^{e}$$

由于荷载也是向量，它的坐标转换由相同的公式表达：

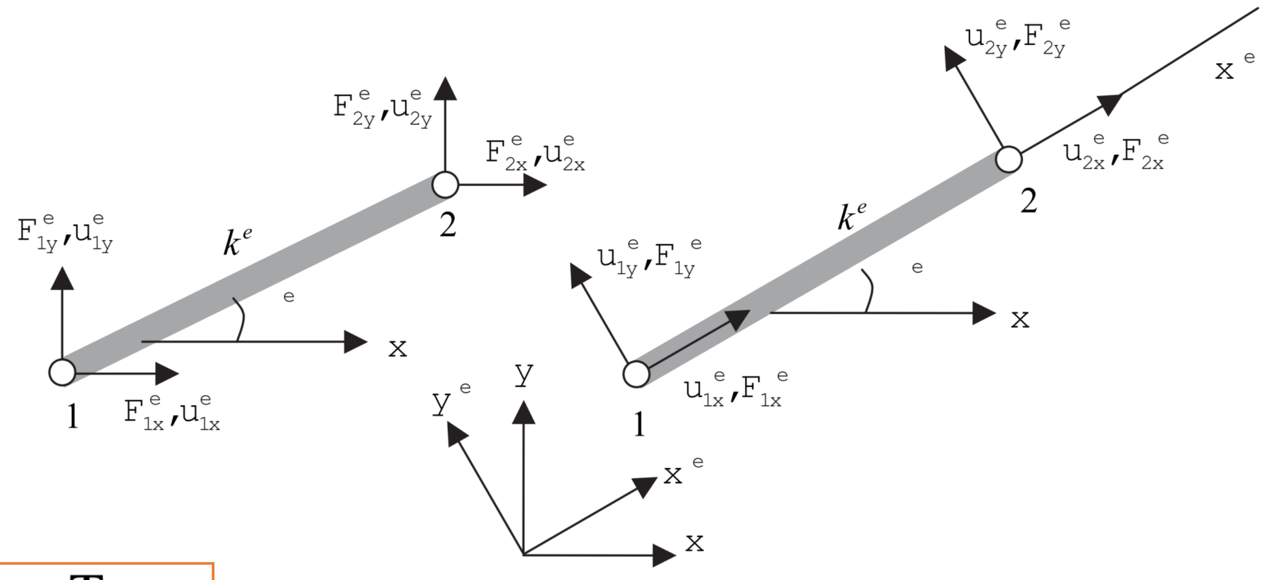
$$\text{(a)} \quad \mathbf{F}'^{e} = \mathbf{R}^{e}\mathbf{F}^{e}, \qquad \text{(b)} \quad \mathbf{F}^{e} = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{F}'^{e}$$

2.4 二维桁架

$$\mathbf{d}'^{e} = \mathbf{R}^{e}\mathbf{d}^{e}$$

$$\mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{d}'^{e} = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{R}^{e}\mathbf{d}^{e} = \mathbf{d}^{e}$$

$$\text{(a)}\quad \mathbf{F}'^{e} = \mathbf{R}^{e}\mathbf{F}^{e}, \qquad \text{(b)}\quad \mathbf{F}^{e} = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{F}'^{e}$$



$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{e} &= \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{F}'^{e} \\ &= \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}'^{e}\mathbf{d}'^{e} \\ &= \underbrace{\mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}'^{e}\mathbf{R}^{e}}_{\mathbf{K}^{e}}\mathbf{d}^{e}\end{aligned}$$

整体坐标系下的单元刚度矩阵

$$\boxed{\mathbf{K}^{e} = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}}\mathbf{K}'^{e}\mathbf{R}^{e}}$$

2.4 二维桁架

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^{e\mathrm{T}} \mathbf{K}'^e \mathbf{R}^e$$

- 对称。
- 半正定。
- 亏秩（奇异）。

$$\mathbf{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e \\ \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e \\ -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e \\ -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e \end{bmatrix}$$

- 得到整体坐标系中的单元刚度矩阵后，按照和一维的同样方法进行系统刚度矩阵和荷载向量的组装。

2.4 二维桁架

算例

有限元分析的步骤

- 前处理：建立单元编号、节点整体编号、每个单元的组成节点。
- 计算
  - ✓ 单元内计算
  - ✓ 组装
  - ✓ 施加边界条件
  - ✓ 求解
- 后处理：计算系统的变形、应力、应变等，以及图形显示。

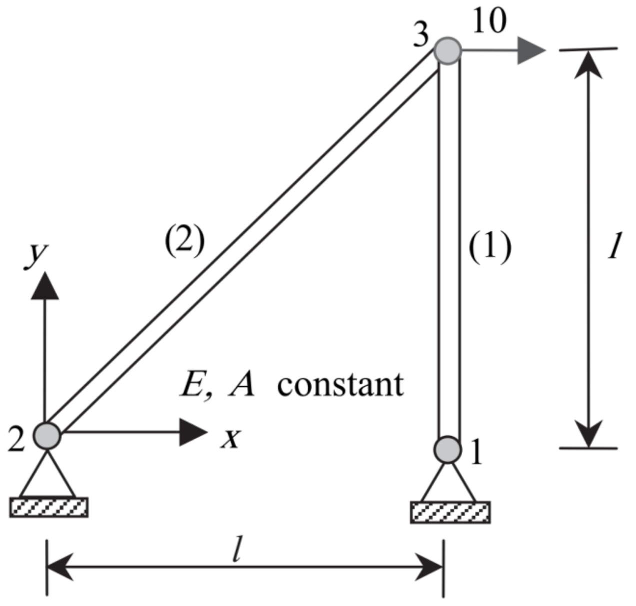


Figure 2.13 Two-element truss structure.

2.4 二维桁架

算例

单元(1)

$$\phi^{(1)} = 90^\circ$$

$$\cos 90^\circ = 0, \qquad \sin 90^\circ = 1,$$

$$l^{(1)} = l, \qquad k^{(1)} = \frac{A^{(1)}E^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{AE}{l}$$

$$\mathbf{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\phi^e & \cos\phi^e\ \sin\phi^e & -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e\ \sin\phi^e \\ \cos\phi^e\ \sin\phi^e & \sin^2\phi^e & -\cos\phi^e\ \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e \\ -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e\ \sin\phi^e & \cos^2\phi^e & \cos\phi^e\ \sin\phi^e \\ -\cos\phi^e\ \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e & \cos\phi^e\ \sin\phi^e & \sin^2\phi^e \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = \frac{AE}{l} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} [1] \\ \\ [3] \end{array} \\ \quad [1] \qquad [3] \end{array}$$

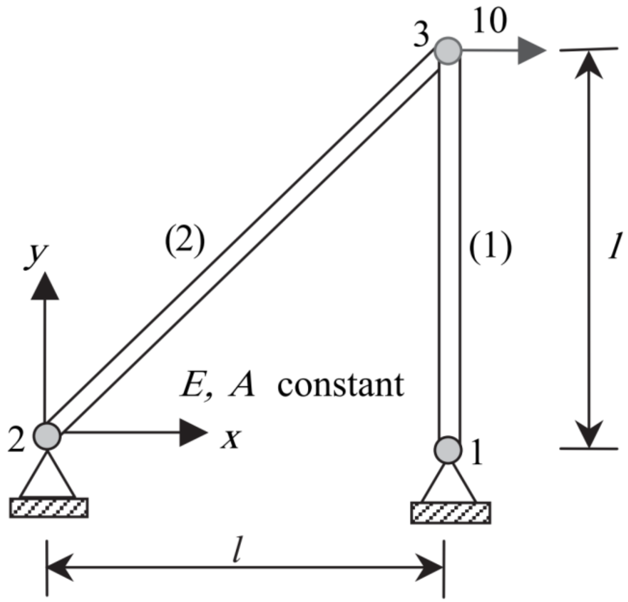


Figure 2.13 Two-element truss structure.

2.4 二维桁架

算例

单元(2)

$$\phi^{(2)} = 45^\circ$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad l^{(2)} = \sqrt{2}l,$$

$$k^{(2)} = \frac{A^{(2)}E^{(2)}}{l^{(2)}} = \frac{AE}{\sqrt{2}l},$$

$$\boxed{\mathbf{K}^e = k^e \begin{bmatrix} \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e \\ \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e \\ -\cos^2\phi^e & -\cos\phi^e \sin\phi^e & \cos^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e \\ -\cos\phi^e \sin\phi^e & -\sin^2\phi^e & \cos\phi^e \sin\phi^e & \sin^2\phi^e \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} [2] \\ \\ [3] \end{array} \\ \begin{array}{cc} [2] & \qquad [3] \end{array} \end{array}$$

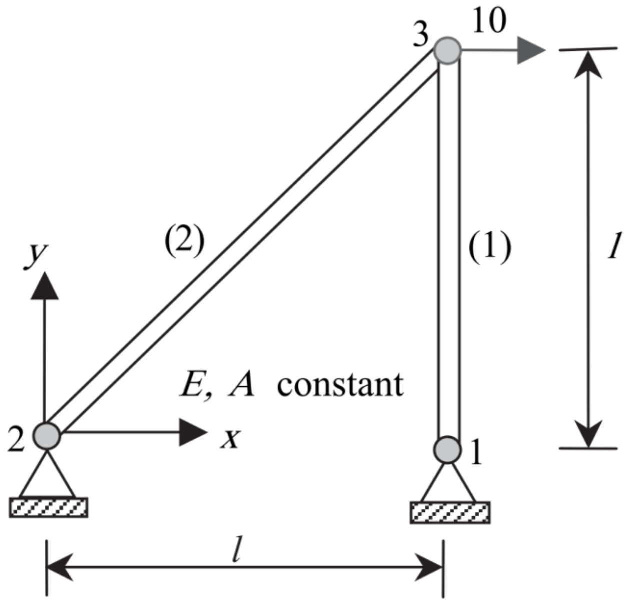


Figure 2.13 Two-element truss structure.

2.4 二维桁架

算例

组装

$$
\mathbf{K}^{(1)}=\frac{AE}{l}\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc}[1] \quad & \quad [3]\end{array} \end{array}\begin{array}{c}[1] \\ \\ [3]\end{array}
$$

$$
\mathbf{K}^{(2)}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \\ \begin{array}{cc}[2] \quad & \quad [3]\end{array} \end{array}\begin{array}{c}[2] \\ \\ [3]\end{array}
$$

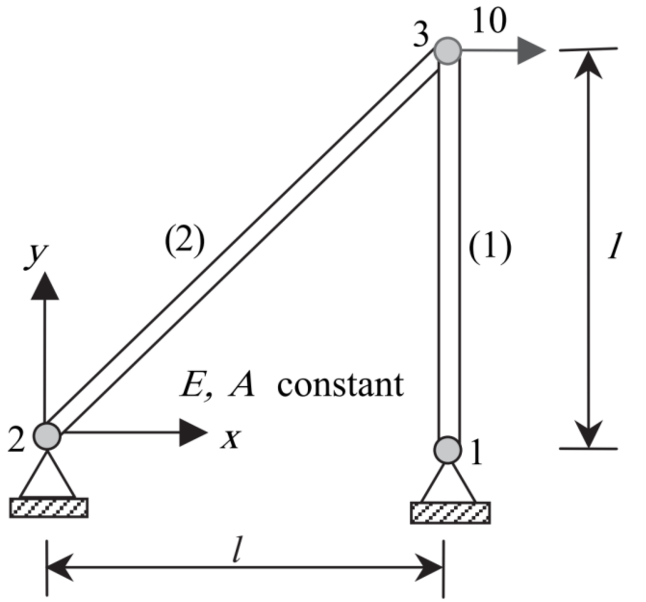


Figure 2.13 Two-element truss structure.

$$
\mathbf{K}=\frac{AE}{l}\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc}[1] \qquad & \qquad [2] \qquad & \qquad [3]\end{array} \end{array}\begin{array}{c}[1] \\ \\ [2] \\ \\ [3]\end{array}
$$

$$
\mathbf{d}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{array}\right] \qquad \mathbf{f}=\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{array}\right] \qquad \mathbf{r}=\left[\begin{array}{c} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]
$$

2.4 二维桁架

算例

系统方程组求解

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

施加边界条件：对角元素置1(方法B)

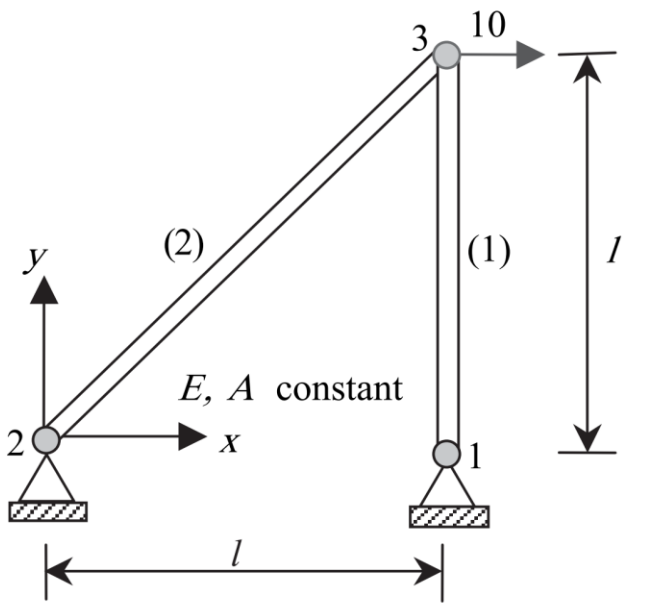


Figure 2.13 Two-element truss structure.

$$\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \frac{l}{AE}\begin{bmatrix} 10+20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}$$

2.4 二维桁架

算例

后处理

- 支座反力：将节点位移带入系统方程组。

- 单元（杆）应力：

$$\sigma^e = E^e \frac{u'^e_{2x} - u'^e_{1x}}{l^e} = \frac{E^e}{l^e}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} u'^e_{1x} \\ u'^e_{1y} \\ u'^e_{2x} \\ \bar{u}'^e_{2y} \end{bmatrix} = \frac{E^e}{l^e}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{R}^e\mathbf{d}^e$$

$$= \frac{E^e}{l^e}[-\cos\phi^e \quad -\sin\phi^e \quad \cos\phi^e \quad \sin\phi^e]\mathbf{d}^e.$$

Element (2)

$$\phi^{(2)} = 45^\circ \quad (\cos\phi^{(2)} = 1/\sqrt{2},\ \sin\phi^{(2)} = 1/\sqrt{2}),$$

$$\mathbf{d}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}\frac{l}{AE},$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1/\sqrt{2} \quad -1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2} \quad 1/\sqrt{2}]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}\frac{1}{A} = \frac{10\sqrt{2}}{A}.$$

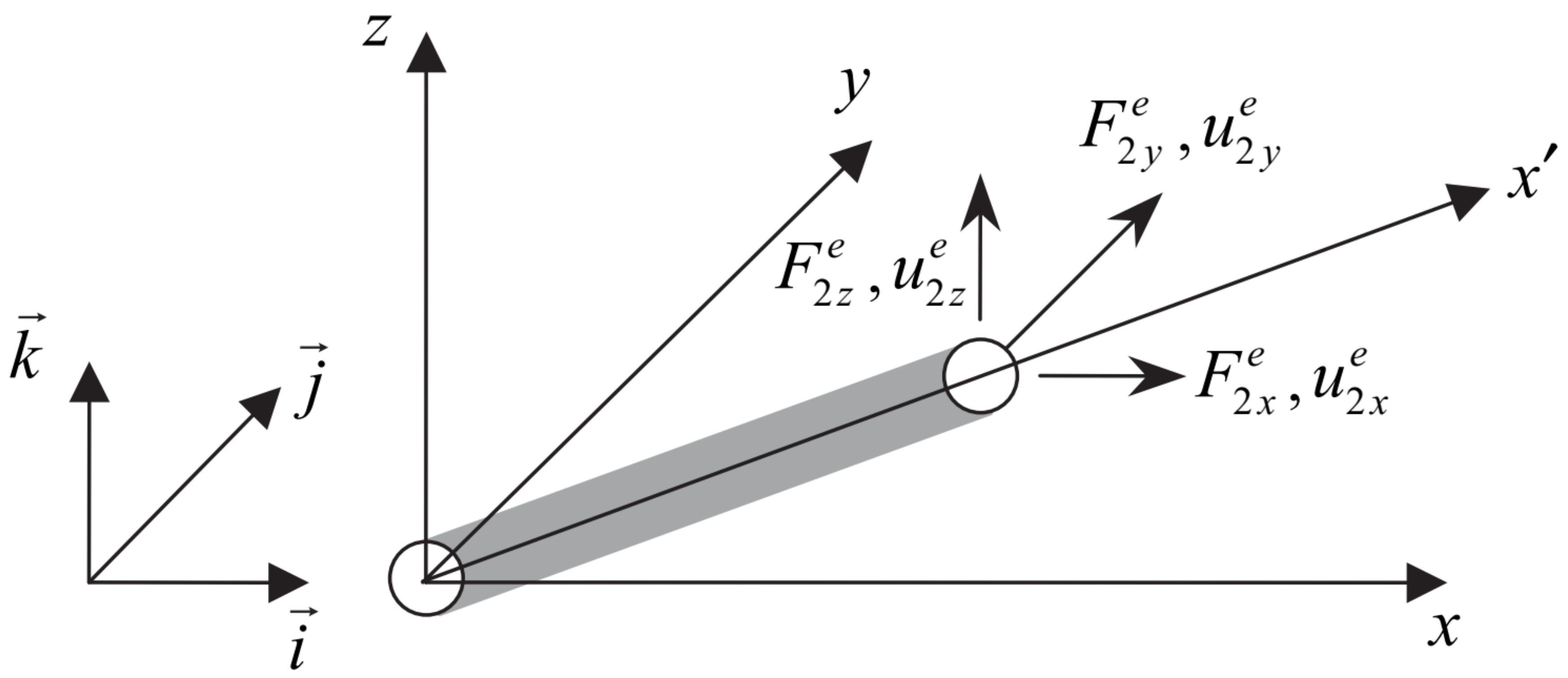
Element (1)

$$\phi^{(1)} = 90^\circ \quad (\cos\phi^{(1)} = 0,\ \sin\phi^{(1)} = 1),$$

$$\mathbf{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}\frac{l}{AE},$$

$$\sigma^{(1)} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10+20\sqrt{2} \\ -10 \end{bmatrix}\frac{1}{A} = \frac{-10}{A}$$

2.5 三维桁架



◆ 整体坐标系中的单元自由度向量和节点力向量：

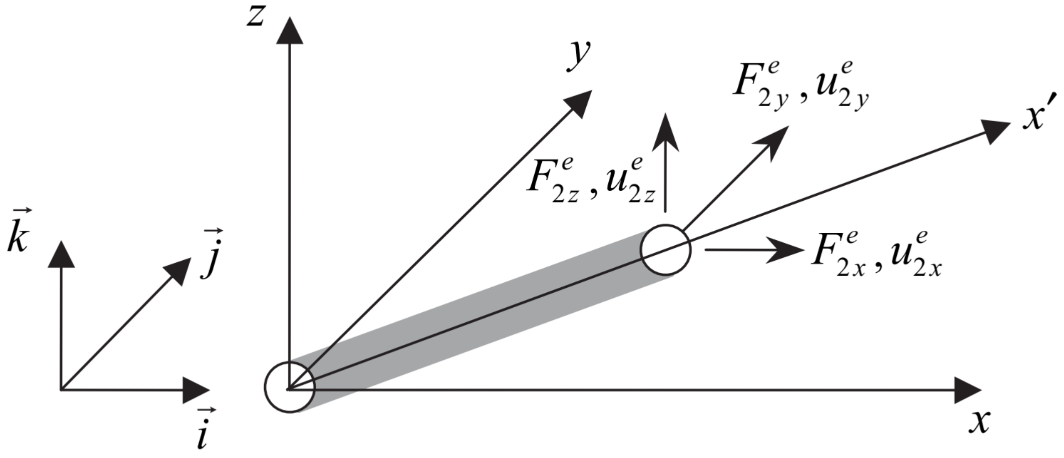
$$\mathbf{d}^e = [u_{1x}^e \quad u_{1y}^e \quad u_{1z}^e \quad u_{2x}^e \quad u_{2y}^e \quad u_{2z}^e]^\mathrm{T}$$

$$\mathbf{F}^e = [F_{1x}^e \quad F_{1y}^e \quad F_{1z}^e \quad F_{2x}^e \quad F_{2y}^e \quad F_{2z}^e]^\mathrm{T}$$

2.5 三维桁架

单元分析

◆ 局部坐标系中的刚度方程同一维情况一样。



$$\begin{bmatrix} F'^e_{1x} \\ F'^e_{2x} \end{bmatrix} = k^e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'^e_{1x} \\ u'^e_{2x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^e = [u_{1x}^e \quad u_{1y}^e \quad u_{1z}^e \quad u_{2x}^e \quad u_{2y}^e \quad u_{2z}^e]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{F}^e = [F_{1x}^e \quad F_{1y}^e \quad F_{1z}^e \quad F_{2x}^e \quad F_{2y}^e \quad F_{2z}^e]^{\mathrm{T}}$$

◆ 局部坐标系方向的单位向量(局部基向量)：

$$\boxed{\vec{i}' = \frac{1}{l^e}(x_{21}^e \vec{i} + y_{21}^e \vec{j} + z_{21}^e \vec{k})} \qquad x_{21}^e = x_2^e - x_1^e$$

2.5 三维桁架

单元分析

$$u'^{e}_{Ix}\vec{i}' + u'^{e}_{Iy}\vec{j}' + u'^{e}_{Iz}\vec{k}' = u^{e}_{Ix}\vec{i} + u^{e}_{Iy}\vec{j} + u^{e}_{Iz}\vec{k}$$

$$u'^{e}_{Ix} = u^{e}_{Ix}\vec{i}\cdot\vec{i}' + u^{e}_{Iy}\vec{j}\cdot\vec{i}' + u^{e}_{Iz}\vec{k}\cdot\vec{i}'$$

$$\vec{i}' = \frac{1}{l^e}(x^e_{21}\vec{i} + y^e_{21}\vec{j} + z^e_{21}\vec{k})$$

$$u'^{e}_{Ix} = \frac{1}{l^e}\left[x^e_{21}u^e_{Ix} + y^e_{21}u^e_{Iy} + z^e_{21}u^e_{Iz}\right]$$

$$\begin{bmatrix} u'^{e}_{1x} \\ u'^{e}_{2x} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} x^e_{21} & y^e_{21} & z^e_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^e_{21} & y^e_{21} & z^e_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^e}\mathbf{d}^e$$

$$\mathbf{K}^e = \underset{6\times 2}{\mathbf{R}^{e\mathrm{T}}}\ \underset{2\times 2}{\mathbf{K}'^{e}}\ \underset{2\times 6}{\mathbf{R}^e}$$

- ◆ 根据向量的不变性推导坐标转换关系，进而得到刚度矩阵转换关系。
- ◆ 组装过程同二维情况一样。

2.6 小结与讨论

- 有相似形式的物理问题，例如一维热传导问题、一维扩散问题等，都可以采用同样的方法建立系统方程组。
- 直接建立系统方程组的方法非常局限，对于高阶单元和多维问题等复杂情况，需要从弱形式出发建立方程组(标准方法)。

大型软件应用

有限单元法（finite element method）

刘治军 青年研究员
土木工程系
liuzhijun@lzu.edu.cn

第3讲　张量、变分以及弹性力学问题变分原理

本讲内容

3.1 张量简介

3.2 弹性力学基本方程

3.3 变分简介

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

3.1 张量简介

◆ 张量是满足一定坐标转换关系的有序数的集合。

◆ 张量用于表示客观的物理量，一个张量在不同的坐标系中可以有不同的分量表达式，但是其整体是客观不变的。例如应力、应变以及常见的向量。

参考书目:

1. 陆明万，罗学富，弹性力学基础，第一册附录
2. 黄克智，薛明德，陆明万，张量分析，第二版

3.1 张量简介

◆ 张量两种表示方式：实体表达和分量形式。

位移: $\mathbf{u} = u_i \boldsymbol{e}_i \ (i, j = 1, 2, 3)$、$u_i$

应力：$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \ (i, j = 1, 2, 3)$、$\sigma_{ij}$

应变：$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \ (i, j = 1, 2, 3)$、$\varepsilon_{ij}$

弹性张量: $\mathbf{C} = C_{ijkl} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_k \boldsymbol{e}_l \ (i, j = 1, 2, 3)$ 、 C_{ijkl}

这里的1,2,3直角坐标系(笛卡尔坐标系)中常用来表示x, y, z； x, y, z有时候也用x_1, x_2, x_3表示。

◆ 张量分量中出现n个指标就叫做n阶张量。位移、应力/应变、弹性张量分别为1、2、4阶。

3.1 张量简介

自由指标和哑标

- 哑标：**每一项中成对出现**的指标(重复且只重复一次，出现三次或者三次以上的不是哑指标)称为哑指标，表示遍历其取值范围求和-**爱因斯坦求和约定**。
- 每一对哑指标的字母可以用取值范围相同的另一组字母替换，意义不变。

$$u_{ii}=\sum_{i=1}^{3}u_{ii}=u_{11}+u_{22}+u_{33}$$

$$\sigma_{ij,j}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij,j}=\sigma_{i1,1}+\sigma_{i2,2}+\sigma_{i3,3}$$

3.1 张量简介

自由指标和哑标

- 自由指标：表达式**每一项中出现并且只出现一次**的指标称为自由指标，表示该表达式在该自由指标的取值范围内都成立。
- 一个表达式中的自由指标可以全体地用取值范围相同的另一个字母替换，意义不变，但不能只改变某一项的自由指标而其他项不变。

$$a_i = b_i + c_i \qquad a_j = b_j + c_j \qquad a_1 = b_1 + c_1,\ a_2 = b_2 + c_2,\ a_3 = b_3 + c_3$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \qquad \sigma_{ki} n_i = t_k$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z &= t_x \\
\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z &= t_y \\
\sigma_{xz} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z &= t_z
\end{aligned}$$

3.1 张量简介

二阶单位张量*I*　$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

◆ **单位张量δ作用于某个张量B，如果B和δ的某个指标相同(构成哑指标)，结果是改变B的哑指标为的δ另一个指标。**

$$\mathbf{B}_i\,\boldsymbol{\delta}_{ij}=\mathbf{B}_j$$
$$\mathbf{B}_{ij}\,\boldsymbol{\delta}_{ij}=\mathbf{B}_{ii}$$

3.1 张量简介

坐标转换关系

一阶张量(向量)**u**在两个坐标系xoy和x’oy’中的坐标变换。基向量分别为$\vec{e}_i$和$\vec{e}_{i'}$。坐标分别为u_i和$u_{i'}$

$$u_k = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

$$u_i \vec{e}_i = u_{i'} \vec{e}_{i'}$$

$$\left(u_i \vec{e}_i\right) \cdot \vec{e}_k = \left(u_{i'} \vec{e}_{i'}\right) \cdot \vec{e}_k$$

$$\left(u_i \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k\right) = \left(u_{i'} \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_k\right)$$

$$u_i \delta_{ik} = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

$$u_k = u_{i'} \cos\left\langle \vec{e}_{i'}, \vec{e}_k \right\rangle$$

3.2 弹性力学基本方程

橙色方框标记二维情况下的分量。注意：平面应力中ε_z不为0，平面应变中σ_z不为0；但是建立有限元方程时无需考虑z方向分量。

基本变量

位移： $\mathbf{u}=[u,v,w]^{\mathrm{T}}=[\boxed{u_x},\boxed{u_y},u_z]^{\mathrm{T}}$

应变： $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz}\\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix}\rightarrow[\boxed{\varepsilon_x},\boxed{\varepsilon_y},\varepsilon_z,\boxed{\gamma_{xy}},\gamma_{yz},\gamma_{xz}]^{\mathrm{T}}$

应力： $\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}\rightarrow[\boxed{\sigma_x},\boxed{\sigma_y},\sigma_z,\boxed{\tau_{xy}},\tau_{yz},\tau_{xz}]^{\mathrm{T}}$

3.2 弹性力学基本方程

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+b_x=0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+b_y=0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+b_z=0$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0$$

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy},\tau_{yz},\tau_{xz}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

3.2 弹性力学基本方程

几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{u} = [u, v, w]^{\mathrm{T}} = [u_x, u_y, u_z]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

3.2 弹性力学基本方程

物理方程

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

G常用μ；λ和μ(G)称作Lame’s constants.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & G & 0 & 0 \\ & & \text{称} & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+v)}, \lambda = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$$

3.2 弹性力学基本方程

力（自然）边界条件

- 第2类边界条件
- Neumann boundary condition.
- 自然(natural)边界条件

力（自然）边界： Γ_t

$$
\begin{aligned}
n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} &= t_x \\
n_x\tau_{yx} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{yz} &= t_y \\
n_x\tau_{zx} + n_x\tau_{zy} + n_x\sigma_z &= t_z
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\mathbf{n\sigma} = \mathbf{t}
$$

$$\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^{\mathrm{T}}$$

$$
\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}
$$

3.2 弹性力学基本方程

- ◆ 第1类边界条件
- ◆ Dirichlet boundary condition
- ◆ 本质(essential)边界条件

位移（本质）边界条件

位移（本质）边界： Γ_u

- 一个微分方程可以没有自然边界条件，但必须有本质边界条件，否则有无穷多解。

$$u=\bar{u}, v=\bar{v}, w=\bar{w} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$$

弹性力学基本方程向量表达

平衡方程	$\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{b}=0$	in Ω
几何方程	$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}\mathbf{u}$	in Ω
物理方程	$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$	in Ω
力（自然）边界条件	$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{t}$	on Γ_t
位移（本质）边界条件	$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$	on Γ_u

3.2 弹性力学基本方程

张量表示

$$x \to x_1 \to 1, y \to x_2 \to 2, z \to x_3 \to 3$$

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, u_3]^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad u_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

3.2 弹性力学基本方程

张量表示

$$x \to x_1 \to 1, y \to x_2 \to 2, z \to x_3 \to 3$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\to \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

3.2 弹性力学基本方程

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+b_x=0$$
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+b_y=0$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+b_z=0$$

,表示偏导数

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}+\sigma_{13,3}+b_1=0$$
$$\sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}+\sigma_{23,3}+b_2=0$$
$$\sigma_{31,1}+\sigma_{32,2}+\sigma_{33,3}+b_3=0$$

$$\sigma_{1j,j}+b_1=0$$
$$\sigma_{2j,j}+b_2=0$$
$$\sigma_{3j,j}+b_3=0$$

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0$$

3.2 弹性力学基本方程

几何方程

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2}$$

$$\varepsilon_{33} = u_{3,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2}\right)$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

物理方程

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

具有对称性 D_{ijkl}

各向同性材料 $D_{ijkl} = 2G\delta_{ik}\delta_{jl} + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$

克罗内克δ函数 $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

3.2 弹性力学基本方程

力（自然）边界条件

力（自然）边界： Γ_t

$$n_x\sigma_x + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz} = t_x$$
$$n_x\tau_{yx} + n_y\sigma_y + n_z\tau_{yz} = t_y$$
$$n_x\tau_{zx} + n_x\tau_{zy} + n_x\sigma_z = t_z$$

$$n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12} + n_3\sigma_{13} = t_1$$
$$n_1\sigma_{21} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{23} = t_2$$
$$n_1\sigma_{31} + n_2\sigma_{32} + n_3\sigma_{33} = t_3$$

$$\sigma_{ij}n_j = t_i$$

位移（本质）边界条件

位移（本质）边界：Γ_u

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w}$$

$$u_i = \bar{u}_i$$

弹性力学基本方程张量表达

平衡方程	$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$	in Ω
几何方程	$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$	in Ω
物理方程	$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$	in Ω
力（自然）边界条件	$\sigma_{ij}n_j = t_i$	on Γ_t
位移（本质）边界条件	$u_i = \bar{u}_i$	on Γ_u

弹性力学基本方程表达比较

$\mathbf{A\sigma} + \mathbf{b} = 0$	$\sigma_{ij,j} + b_i = 0$
$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Lu}$	$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$	$\sigma_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}$
$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}$	$\sigma_{ij}n_j = t_i$
$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	$u_i = \bar{u}_i$

3.3 变分简介

参考书目: 陆明万，罗学富，弹性力学基础，第二册附录

泛函：函数的函数。

J：泛函

$$J = J\left(y\left(x\right)\right)$$

y：自变函数

泛函极值：若J在$y(x)=y_0(x)$的邻域$|y(x)-y_0(x)|<\delta$内的值都比$J(y_0(x))$大(小)，则称J在$y(x)=y_0(x)$状态下取得极大(小)值。

求泛函极值的方法称作变分法。与泛函极值相关的问题和原理分别称作变分问题和变分原理。

B. 2. 2 函数的微分与变分

函数 $y(x)$可以有两种不同性质的增量。

(1) 函数的微分：当 $y(x)$是自变量 x 的函数时，由自变量增量(即自变量微分) $\mathrm{d}x$ 所引起的函数增量的主部

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$$

称为函数的**微分**。在微分过程中函数关系 $y(x)$保持不变，如图 B-5 所示，$\mathrm{d}y$ 是同一曲线上相邻两点间的函数值之差的主部。关于微分的运算法则在高等数学中已有详细讨论。

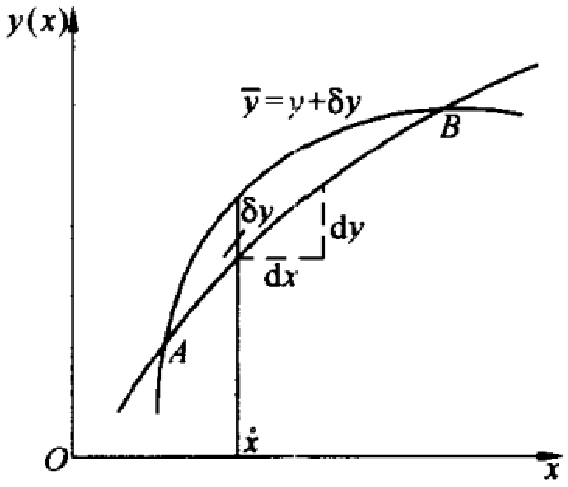


图 B-5

(2) 函数的变分：当 $y(x)$是某个泛函的自变函数时，函数本身可以直接变成与它相邻的容许函数 $\bar{y}(x)$：

$$\bar{y}(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{B.18}$$

其中，ε 是与 x 无关的无穷小量，函数 $\eta(x)$应在一定范围内选择，首先它应是 $y(x)$的同类函数[①]以保证当 $\varepsilon\to 0$时，不仅函数 $\bar{y}(x)$和 $y(x)$本身，而且它们的各阶导数都无限接近。此外，它们还应满足具体问题提出的约束条件，以保证 $\bar{y}(x)$是容许函数。

这种因函数关系的直接变化所引起的自变函数的增量

$$\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x) = \varepsilon\eta(x) \tag{B. 19}$$

称为函数的一阶变分，简称**变分**，记为 δy。在变分过程中，函数 $y(x)$ 的自变量 x 保持不变，如图 B-5 所示，δy 是同一个自变量 x 处相邻两条曲线间的函数值之差。

函数 $y(x)$ 的一阶导数 $y'(x)$ 仍是自变量 x 的函数。按定义(B. 19)式，$y'(x)$ 的变分为

$$\delta y' = \bar{y}'(x) - y'(x)$$

另一方面，把(B. 19)式对 x 求导得

$$(\delta y)' = \bar{y}'(x) - y'(x) = \varepsilon\eta'(x)$$

和上式相比可得

$$\delta y' = (\delta y)' = \varepsilon\eta'(x) \tag{B. 20}$$

其中第一个等式说明，变分和求导的顺序可以交换。一般而论，变分和任意阶导数或任意线性微分算子 $\mathscr{L}(\quad)$ 的顺序均可交换，即

$$\delta y^{(n)} = (\delta y)^{(n)} = \varepsilon\eta^{(n)}(x) \tag{B. 20a}$$

$$\boxed{L(ay+c) = aL(y) + c}$$

$$\delta(\mathscr{L}(y)) = \mathscr{L}(\delta y) = \varepsilon\mathscr{L}(\eta(x)) \tag{B. 20b}$$

B.2.3 复合函数的变分

设复合函数 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 与自变函数 $y(x)$ 及其各阶导数以及与 $y(x)$ 的自变量 x 有关，由自变函数的变分 δy 所引起的函数增量 ΔF 的线性主部称为**复合函数的一阶变分**，记为 δF。它的计算公式可以由多元函数的全微分公式转化而来。若先把 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 看作是函数 F 的 $n+2$ 个"独立变量"，则根据多元函数全微分公式，由这些变量的增量 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}y',\cdots,\mathrm{d}y^{(n)}$ 所引起的函数 F 的增量主部为：

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial y'}\mathrm{d}y'+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\mathrm{d}y^{(n)} \tag{B.21a}$$

但是求 F 的一阶变分时，自变量 x 保持不变，其余"独立变量"的增量都由自变函数的变分 δy 引起，即

$$\mathrm{d}x=\delta x=0;\ \mathrm{d}y=\delta y;\ \mathrm{d}y'=\delta y';\cdots;\mathrm{d}y^{(n)}=\delta y^{(n)} \tag{B.21}$$

将它们代入(B.21a)式就得一阶变分 δF 的计算公式：

$$\delta F=\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} \tag{B.22}$$

由(B.20)和(B.20a)式可见，上式中的 $\delta y',\cdots,\delta y^{(n)}$ 分别是 δy 的 $1\sim n$ 阶导数，因而完全由 δy 所决定。

复合函数**高阶变分**的定义为：

$$\delta^2 F=\delta(\delta F);\cdots;\quad \delta^k F=\delta(\delta^{k-1}F) \tag{B.23}$$

用(B. 22)式代入后，可以证明高阶变分的计算公式为

$$\delta^k F = \left(\delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \delta y^{(n)} \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}\right)^k F \tag{B. 24}$$

右端括号中的微分算子形式上可以像代数多项式的幂那样展中，然后再作用于复合函数 F。

例如复合函数 $F(x, y, y')$ 的一阶变分为

$$\delta F = \delta y \frac{\partial F}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

按定义(B. 23)式计算其二阶变分

$$\begin{aligned}
\delta^2 F &= \delta(\delta F) = \delta y \frac{\partial}{\partial y}(\delta F) + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'}(\delta F) \\
&= \delta y \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\delta y \frac{\partial F}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) \\
&= \left(\delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F + 2\left(\delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\delta y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) F + \left(\delta y' \frac{\partial}{\partial y'}\right)^2 F \\
&= \left(\delta y \frac{\partial}{\partial y} + \delta y' \frac{\partial}{\partial y'}\right)^2 F
\end{aligned}$$

因而验证了(B. 24)式。

根据多元函数的泰勒展开式可证明，由变分 δy 引起的复合函数 F 的增量 ΔF，可用其各阶变分表示成：

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(x, y+\delta y, y'+\delta y', \cdots, y^{(n)}+\delta y^{(n)}) \\ &\quad - F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \\ &= \delta F + \frac{1}{2!}\delta^2 F + \cdots + \frac{1}{k!}\delta^k F + \cdots \end{aligned} \tag{B. 25}$$

最后应指出，由于变分 δy 可以独立选择，与自变函数y 及其各阶导数无关，所以变分 δy(及其各阶导数 $\delta y', \cdots, \delta y^{(n)}$)对自变函数 y(及其各阶导数 $y', \cdots, y^{(n)}$)的偏导数均为零，即

$$\frac{\partial}{\partial y^{(l)}}(\delta y^{(m)}) = \frac{\partial}{\partial y^{(l)}}(\delta y)^{(m)} = 0 \quad (l, m = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{B. 26}$$

在微分学中，自变量的一阶微分 $\mathrm{d}x$ 就等于其全部增量 Δx，因而高阶微分 $\mathrm{d}^k x = 0(k \geqslant 2)$。与此类似，作为自变函数的增量，$\delta y$(及其各阶导数)的高阶变分均为零，即

$$\delta^k y^{(m)} = 0 \quad (k \geqslant 2;\ m = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{B. 27}$$

在(B. 26)(B. 27)式中，$y^{(0)} = y$；$y^{(1)} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x, \cdots, y^{(m)} = \dfrac{\mathrm{d}^{(m)} y}{\mathrm{d}x^{(m)}}$。

- 变分计算规则与微分类似，但是$\delta x=0$。
- 变分与微分区别：微分是自变量变化引起的函数变化，变分是函数变化引起的泛函的变化。
- 变分和微分以及积分都可以交换顺序(有条件)。
- 泛函的极值：一阶变分为0。
- 泛函的极小值：一阶变分为0，二阶变分为正。计算中通常只考虑一阶变分。

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

虚功原理(principle of virtual work)

虚功原理：外力在虚位移上所作的虚功等于静力可能的内力在虚应变上所作的虚功。

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i f_i d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega$$

$$\delta U = \delta W$$

静力可能：满足平衡方程和应力边界条件。

虚位移：一种变形可能状态，满足位移边界条件(本质边界上虚位移为0)。

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

- 虚功方程
- 弱形式

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_\Omega \delta u_i f_i d\Omega$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right)$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{j,i}d\Omega=\int_\Omega \sigma_{ji}\delta u_{j,i}d\Omega=\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega$$

格林定理：

Green's theorem

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}d\Omega=\int_{\partial\Omega} f n_i d\Gamma$$

$$\delta u_i=0 \text{ on } \Gamma_u,\ \sigma_{ij,j}+f_i=0$$

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{t}_i \text{ on } \Gamma_t$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}\right)d\Omega$$

$$=\int_\Omega \sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega=\int_\Omega \sigma_{ij}\frac{\partial\left(\delta u_i\right)}{\partial x_j}d\Omega$$

$$=\int_\Omega \frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)}{\partial x_j}d\Omega-\int_\Omega \delta u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}d\Omega$$

$$=\int_{\partial\Omega}\sigma_{ij}\delta u_i n_j d\Gamma+\int_\Omega \delta u_i f_i d\Omega$$

$$=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_\Omega \delta u_i f_i d\Omega$$

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

虚应变能展开

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i f_i d\Omega$$

三维

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega\\&=\int_{\Omega}\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+2\tau_{xy}\delta\varepsilon_{xy}+2\tau_{yz}\delta\varepsilon_{yz}+2\tau_{xz}\delta\varepsilon_{xz}\right)d\Omega\\&=\int_{\Omega}\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}\right)d\Omega\end{aligned}$$

二维平面应力\平面应变

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega\\&=\int_{\Omega}\left(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)d\Omega\end{aligned}$$

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

虚功原理=弹性力学问题的**弱形式**

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0$$

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i f_i d\Omega$$

- 弱：对连续性(光滑性)的要求降低。平衡方程中出现位移的二阶导数，弱形式中只出现位移的一阶导数，H^1函数即可满足弱形式积分的要求。
- H^1函数即本身和一阶导数都平方可积的函数，常规弹性力学问题有限元中采用的形函数以及位移模式都是多项式，对于这些多项式只要保证在整个求解域上它本身连续就可，也就是C^0函数(0阶连续，也就是函数本身连续)。但是，对一般函数，C^0并不能保证H^1，$H^1\subset C^0$ 。

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i f_i d\Omega$$

对于一切可能的虚位移场，如果有个应力场满足虚功方程，那么该应力场是与外荷载相平衡的应力场。

$$\int_{\Gamma_t}\delta u_i\left(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j\right)d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i\left(\sigma_{ij,j}+f_i\right)d\Omega=0$$

虚位移的任意性

$$\bar{t}_i=\sigma_{ij}n_j,\qquad \sigma_{ij,j}+f=0$$

这个过程反推可以由虚功原理得到平衡方程与应力边界条件。**所以，虚功原理等价于平衡方程加应力边界条件（强形式与弱形式等价）。**

$$\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\frac{1}{2}\left(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}\right)d\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\Omega=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\frac{\partial\left(\delta u_i\right)}{\partial x_j}d\Omega$$

$$=\int_{\Omega}\frac{\partial\left(\sigma_{ij}\delta u_i\right)}{\partial x_j}d\Omega-\int_{\Omega}\delta u_i\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}d\Omega$$

$$=\int_{\partial\Omega}\sigma_{ij}\delta u_i n_j d\Gamma-\int_{\Omega}\delta u_i\sigma_{ij,j}d\Omega$$

$$=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\sigma_{ij}n_j d\Gamma-\int_{\Omega}\delta u_i\sigma_{ij,j}d\Omega$$

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

弱形式

- **很多物理问题并没有能量的概念，弱形式是控制方程两端乘以场变量的变分后再积分得到的，这也是有限元中对一般方程建立弱形式的标准方法。**
- 弹性力学问题的控制方程(governing equation)就是平衡方程。
- 可以直接从平衡方程出发推导虚功原理。

$$\int_\Omega \delta\mathbf{u}\cdot\left(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{f}\right)=\mathbf{0}$$

$$\int_\Omega \delta u_i\left(\sigma_{ij,j}+f_i\right)=0$$

按照前面同样的方法推导

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}\cdot\overline{\mathbf{t}}d\Gamma+\int_\Omega\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}d\Omega$$

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\overline{t}_i d\Gamma+\int_\Omega\delta u_i f_i d\Omega$$

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

最小势能原理(principle of minimum potential energy)

满足几何约束(这里指几何方程和位移边界条件)的所有变形状态中，真实状态(满足平衡方程和应力边界条件)对应的势能最小。(这里所有的状态都满足物理方程-本构关系)

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \bar{t}_i\,d\Gamma - \int_{\Omega} u_i f_i\,d\Omega = \frac{1}{2}\int_{\Omega} D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \bar{t}_i\,d\Gamma - \int_{\Omega} u_i f_i\,d\Omega$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int_{\Omega} D_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} + \delta\varepsilon_{kl}\right)\left(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}\right)d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i\left(u_i + \delta u_i\right)d\Gamma - \int_{\Omega} f_i\left(u_i + \delta u_i\right)d\Omega$$

$$\Pi_1 \geq \Pi$$

3.4 弹性问题的弱形式与变分原理

最小势能原理

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}d\Omega-\int_{\Gamma_t}u_i\bar{t}_i d\Gamma-\int_{\Omega}u_i f_i d\Omega$$

$$\Pi_1=\frac{1}{2}\int_{\Omega}D_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl}+\delta\varepsilon_{kl}\right)\left(\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}\right)d\Omega-\int_{\Gamma_t}\bar{t}_i\left(u_i+\delta u_i\right)d\Gamma-\int_{\Omega}f_i\left(u_i+\delta u_i\right)d\Omega$$

$$\Pi_1-\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}D_{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega+\int_{\Omega}D_{ijkl}\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}d\Omega-\int_{\Gamma_t}\bar{t}_i\delta u_i d\Gamma-\int_{\Omega}f_i\delta u_i d\Omega$$

$$\int_{\Omega}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Omega}\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega=\int_{\Gamma_t}\delta u_i\bar{t}_i d\Gamma+\int_{\Omega}\delta u_i f_i d\Omega$$

虚功原理

$$\Pi_1-\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}D_{ijkl}\delta\varepsilon_{kl}\delta\varepsilon_{ij}d\Omega\geq 0$$

D的正定性

当且仅当虚应变全为0时等号成立。考虑到本质边界上虚位移为0，当且仅当虚位移在整个区域上为0时等号成立。

最小势能原理

$$\boxed{\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} D_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t} u_i \bar{t}_i\,d\Gamma - \int_{\Omega} u_i f_i\,d\Omega}$$

$$\boxed{\delta\Pi = 0} \Longrightarrow \boxed{\int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega = \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i\,d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i f_i\,d\Omega}$$

- ◆ 最小势能原理等价于虚功原理。
- ◆ 最小势能原理和虚功原理是两种建立弹性问题有限元方程的基本方法。

第4讲 连续体问题的有限元

——以平面弹性力学问题的线性(三节点)三角形单元为例

本讲内容

4.1 有限元分析流程

4.2 三节点三角形单元的位移模式

4.3 建立刚度方程

4.4 本质边界条件处理

4.1 有限元分析流程

完整的有限元分析步骤

A. 前处理-得到节点坐标、编号和单元编号以及联通关系。

B. 计算。

C. 后处理-计算应力应变等。

有限元计算过程：

1. 计算刚度矩阵
2. 计算右端向量
3. 施加本质边界条件
4. 解线性方程组

刚度矩阵计算分两个关键步骤

- 单元内的计算

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}^e \boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}^e \boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{eT} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}^e d\Omega$$

- 单元矩阵的组装

两个步骤不是独立的，而是耦合在一起的，每次得到单元刚度矩阵后，都放在整体刚度矩阵中然后进行下一个单元计算。

弹性力学问题有限元流程概略

单元插值 $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}$ $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{B}^e(\mathbf{x})\mathbf{d}$

单元积分 $\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{B}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\mathbf{B}^e d\Omega$ $\mathbf{P}^e = \int_{\Gamma_s^e} \left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \left(\mathbf{N}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{b} d\Omega$

组装整体刚度矩阵、荷载向量 $\mathbf{K} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e$ $\mathbf{P} = \mathop{\mathsf{A}}_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{P}^e$

有限元直接刚度方程 $\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P}$

考虑（边界）约束条件 $\underset{\sim}{\mathbf{K}}\underset{\sim}{\mathbf{d}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}}$

线性方程求解 $\underset{\sim}{\mathbf{d}} = \underset{\sim}{\mathbf{K}}^{-1}\underset{\sim}{\mathbf{P}}$

4.2 三节点三角形单元的位移模式

单元位移模式(用节点位移表示单元内和边上任意点的位移)

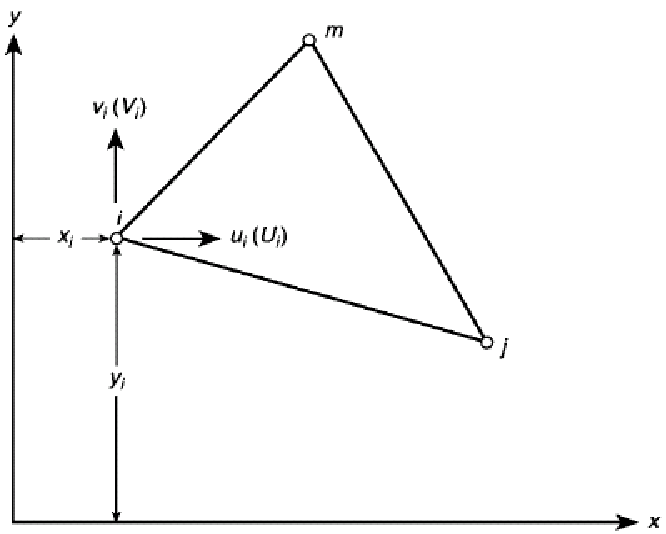
有限元中，未知量称为自由度。这个三角形单元的自由度数为6。

- 典型3节点三角形单元节点编号为i，j，m（逆时针方向为正）
- 每个节点的位移（2个）

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \qquad (i, j, m)$$

- 每个单元的节点位移（6个）

$$\boldsymbol{d}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_j \\ \boldsymbol{d}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i & v_i & u_j & v_j & u_m & v_m \end{bmatrix}^T$$



4.2 三节点三角形单元的位移模式

- 典型3节点三角形单元位移模式选取完备的一次多项式

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y \\ v &= \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y \end{aligned}}$$

- $\boxed{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6}$ 是待定系数, 可以用单元的6 个结点位移表示：

$$\boxed{\begin{aligned} u_i &= \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i \\ u_j &= \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j \\ u_m &= \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} v_i &= \beta_4 + \beta_5 x_i + \beta_6 y_i \\ v_j &= \beta_4 + \beta_5 x_j + \beta_6 y_j \\ v_m &= \beta_4 + \beta_5 x_m + \beta_6 y_m \end{aligned}}$$

4.2 三节点三角形单元的位移模式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2A$$

如果三个节点按照逆时针排列，该行列式为面积2倍；否则，为面积相反数的2倍。我们假定三个节点逆时针排列。

- 求解广义坐标

线性方程组系数行列式：（A为三角形的面积）

$$\beta_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_m & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}\left(a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m\right)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & u_i & y_i \\ 1 & u_j & y_j \\ 1 & u_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}\left(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m\right)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & x_i & u_i \\ 1 & x_j & u_j \\ 1 & x_m & u_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2A}\left(c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m\right)$$

a, b, c为第1, 2, 3列的代数余子式。

4.2 三节点三角形单元的位移模式

同样可以得到：

$$\beta_4 = \frac{1}{2A}(a_i v_i + a_j v_j + a_m v_m)$$

$$\beta_5 = \frac{1}{2A}(b_i v_i + b_j v_j + b_m v_m)$$

$$\beta_6 = \frac{1}{2A}(c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

***a*, *b*, *c*为第1, 2, 3列的代数余子式。**

其中

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = x_j y_m - x_m y_j$$

$$b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix} = \mathrm{y}_j - y_m$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix} = -x_j + x_m$$

通过下标轮换可以得到a_j，b_j，c_j，a_m，b_m，c_m

4.2 三节点三角形单元的位移模式

➢ 插值函数（形函数）

◆ 将求得的系数代回单元位移模式可得：

$$\boxed{\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned}}$$

其中 $$\boxed{N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i, j, m)}$$

◆ N_i，N_j，N_m称为单元的插值函数或形函数（**shape function**），是x、y的一次（线性）函数

4.2 三节点三角形单元的位移模式

◆ 节点位移表示的位移函数

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}N_i & \boldsymbol{I}N_j & \boldsymbol{I}N_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_j \\ \boldsymbol{d}_m \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{I}$是2*2的单位矩阵。

$$=\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{N}_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_i \\ \boldsymbol{d}_j \\ \boldsymbol{d}_m \end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{N}_i=\boldsymbol{I}N_i=\begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}$$

◆ N^e 称为插值函数矩阵或形函数矩阵（**shape function matrix**）

4.2 三节点三角形单元的位移模式

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i, j, m)$$

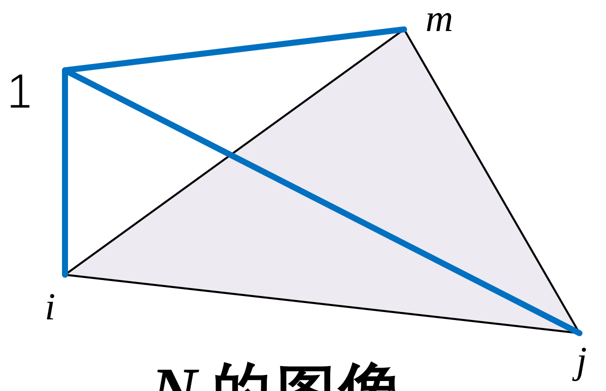
$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

a为第1列代数余子式，
b为第2列代数余子式，
c为第3列代数余子式。

◆ 形函数特点

□结点上形函数的值(**Kronecker delta**)：本点为1，它点为0。

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad i = j \\ 0 & if \quad i \neq j \end{cases} \qquad (i, j, m)$$



N_i的图像

$$N_i = \frac{1}{2A}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

根据代数余子式表达的行列式值的性质得出。

4.2 三节点三角形单元的位移模式

- **Kronecker delta是有限元形函数一个很重要的性质，也叫做插值特性(interpolation property)。**

$$u(x_i, y_i) = N_i(x_i, y_i)u_i + N_j(x_i, y_i)u_j + N_m(x_i, y_i)u_m = u_i$$

4.2 三节点三角形单元的位移模式

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \qquad (i, j, m)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

***a*为第1列代数余子式，*b*为第2列代数余子式，*c*为第3列代数余子式。**

◆ 形函数特点

□单元中任一点各形函数之和**等于1(partition of unity,单位分解)**

$$\boxed{N_i + N_j + N_m = 1}$$

根据代数余子式表达的行列式值的性质得出。

$$N_i + N_j + N_m = \frac{1}{2A}\left(\sum a_i + x\sum b_i + y\sum c_i\right) = \frac{1}{2A}\sum a_i = 1$$

$$\sum a_i = a_i \cdot 1 + a_j \cdot 1 + a_m \cdot 1 = D = 2A$$

第1列元素分别乘以代数余子式并相加。

$$\sum b_i = b_i \cdot 1 + b_j \cdot 1 + b_m \cdot 1 = 0$$

第1列元素分别乘以第2列元素的代数余子式并相加。

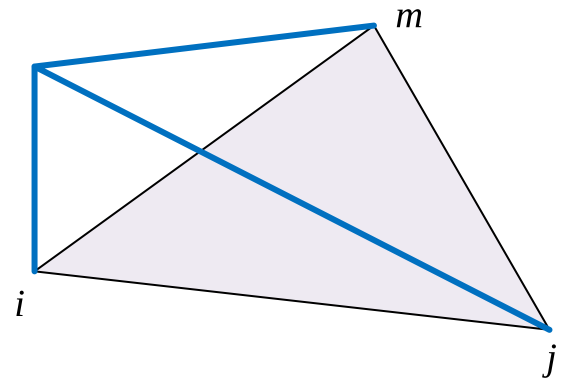
4.2 三节点三角形单元的位移模式

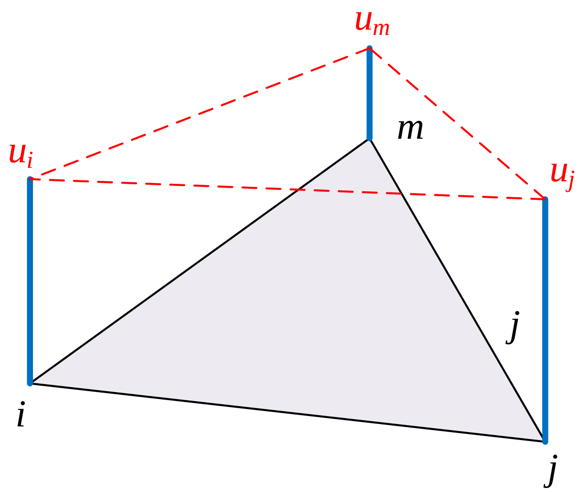
- 若x方向有**刚体位移** u_0，$u_i = u_j = u_m = u_0$

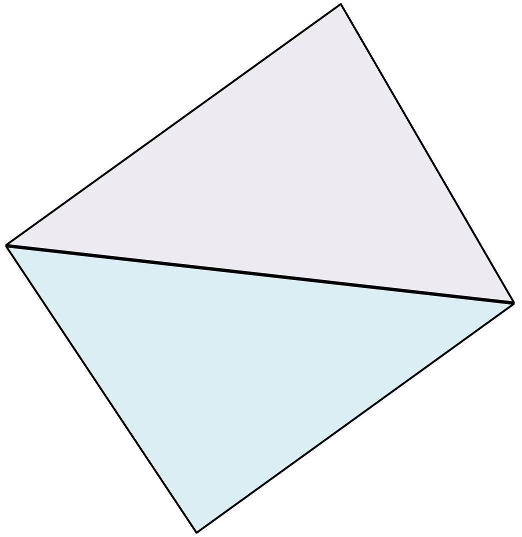
$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m = \left(N_i + N_j + N_m\right) u_0 = u_0$$

4.2 三节点三角形单元的位移模式

- 3结点三角形单元的形函数是**线性**的，在单元内部及边界上的位移可由结点位移唯一确定。相邻**单元公共边界上位移连续**。







4.2 三节点三角形单元的位移模式

➢ 应变矩阵和应力矩阵

单元位移 $\xrightarrow{\text{几何方程}}$ 应变 $\xrightarrow{\text{物理方程}}$ 应力

弹性力学基本方程向量表达

平衡方程	$\mathbf{A\sigma}+\mathbf{b}=0$	in Ω
几何方程	$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{Lu}$	in Ω
物理方程	$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D\varepsilon}$	in Ω
力（自然）边界条件	$\mathbf{n\sigma}=\mathbf{t}$	on Γ_s
位移（本质）边界条件	$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}$	on Γ_u

◆ 单元应变： 这里剪应变是工程应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{d}^e=\boldsymbol{L}\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{N}_m\end{bmatrix}\boldsymbol{d}^e$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_j & \boldsymbol{B}_m\end{bmatrix}\boldsymbol{d}^e=\boldsymbol{B}^e\boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

◆ $\boldsymbol{B}$ 称为应变矩阵，$\boldsymbol{L}$ 是平面问题的微分算子。

4.2 三节点三角形单元的位移模式

◆ 应变矩阵**B**的分块矩阵：

$$\boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{L}\boldsymbol{N}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (i, j, m)$$

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \Rightarrow \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_i, \qquad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} c_i$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \Rightarrow \boldsymbol{B}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_j & \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}$$

4.2 三节点三角形单元的位移模式

◆ 单元应力：

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D\varepsilon} = \boldsymbol{DB}^e \boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{S}^e \boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{S}^e = \boldsymbol{DB}^e = \boldsymbol{D}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_j & \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_i & \boldsymbol{S}_j & \boldsymbol{S}_m \end{bmatrix}$$

弹性力学基本方程向量表达

平衡方程	$\mathbf{A\sigma} + \mathbf{b} = 0$	in Ω
几何方程	$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Lu}$	in Ω
物理方程	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$	in Ω
力（自然）边界条件	$\mathbf{n\sigma} = \mathbf{t}$	on Γ_s
位移（本质）边界条件	$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$	on Γ_u

◆ S 称为应力矩阵，其分块矩阵为

$$\boldsymbol{S}_i = \boldsymbol{DB}_i = \frac{E_0}{2\left(1-\nu_0^2\right)A}\begin{bmatrix} b_i & \nu_0 c_i \\ \nu_0 b_i & c_i \\ \frac{1-\nu_0}{2} c_i & \frac{1-\nu_0}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m)$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_0}{\left(1-\nu_0^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_0)/2 \end{bmatrix}$$

平面应力 $E_0 = E, \quad \nu_0 = \nu$

平面应变 $E_0 = \dfrac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \dfrac{\nu}{1-\nu}$

常应变/应力单元，精度低。

4.3 建立刚度方程

利用最小势能原理建立有限元方程

- 总势能：$\boxed{\Pi = U + V}$

$$U = \frac{1}{2}\iiint(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy})dxdydz$$

$$V = -\iiint(b_x u + b_y v + b_z w)dxdydz - \iint_{\Gamma_s}(t_x u + t_y v + t_z w)ds$$

$$\Pi = U + V = \int_{\Omega}\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}tdxdy - \int_{\Omega}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}tdxdy - \int_{\Gamma_s}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{t}tds$$

（t为厚度，一般取1）

- 将各单元势能相加得到整个系统的势能：

$$\Pi = \sum_e\left(\boldsymbol{d}^{eT}\int_{\Omega_e}\frac{1}{2}\boldsymbol{B}^{eT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^e tdxdy\boldsymbol{d}^e\right) - \sum_e\left(\boldsymbol{d}^{eT}\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^{eT}\boldsymbol{b}tdxdy\right) - \sum_e\left(\boldsymbol{d}^{eT}\int_{\Gamma_s}\boldsymbol{N}^{eT}\boldsymbol{t}tdS\right)$$

4.3 建立刚度方程

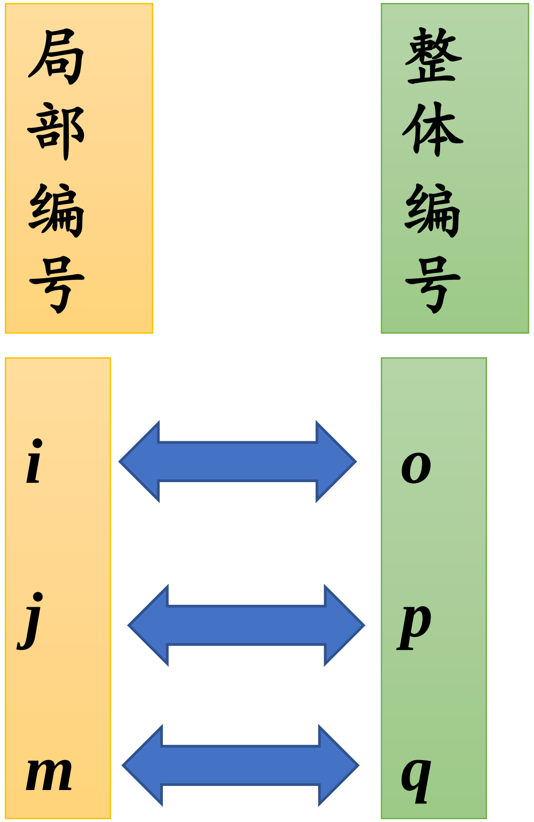
◆ 引入单元节点自由度和总体节点自由度的转换矩阵*L*:

$$\boldsymbol{d}^{e} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{d}$$

其中

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & \cdots & u_i & v_i & \cdots & u_n & v_n \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{L}_{6\times 2n} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & 2o-1 & 2o & \cdots & 2p-1 & 2p & \cdots & 2q-1 & 2q & \cdots & 2n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



◆ 该矩阵其实就是编号的一个映射关系，n为总结点数

4.3 建立刚度方程

- 令：

单元刚度矩阵 $$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{eT} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B}^e t dxdy = \boldsymbol{K}^e$$

单元等效结点荷载列阵 $$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^{eT} \boldsymbol{b} t dxdy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^{eT} \boldsymbol{t} t dS$$

- 则整个系统的总势能为：

离散形式的总势能 $$\Pi = \boldsymbol{d}^T \frac{1}{2} \sum_e \left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{L} \right) \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^T \sum_e \left(\boldsymbol{L}^T \boldsymbol{F}^e \right)$$

整体刚度矩阵 $$\boldsymbol{K} = \sum_e \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{L}$$

整体结点荷载列阵 $$\boldsymbol{F} = \sum_e \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{F}^e$$

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1}{2} \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{F}$$

4.3 建立刚度方程

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{F} \longrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{d}} = \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_E \\ \boldsymbol{d}_F \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_E \\ \boldsymbol{r}_F \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_E \\ \boldsymbol{f}_F \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_E & \boldsymbol{K}_{EF} \\ \boldsymbol{K}_{EF}^T & \boldsymbol{K}_F \end{bmatrix}$$

- 系统总势能的未知变量是未知节点位移$\boldsymbol{d}_F$，泛函取驻值的条件是其一阶变分为零，$\delta\boldsymbol{\Pi} = 0$，即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{d}_F} = \boldsymbol{r}_F = \boldsymbol{0} \longleftrightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{d}_{Fi}} = 0, i = 1,2\ldots.$$

- 由此可得有限元的求解方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_E & \boldsymbol{K}_{EF} \\ \boldsymbol{K}_{EF}^T & \boldsymbol{K}_F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_E \\ \boldsymbol{d}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_E + \boldsymbol{r}_E \\ \boldsymbol{f}_F \end{bmatrix}$$

4.3 建立刚度方程

整体变量表达式

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i$$

重点理解！

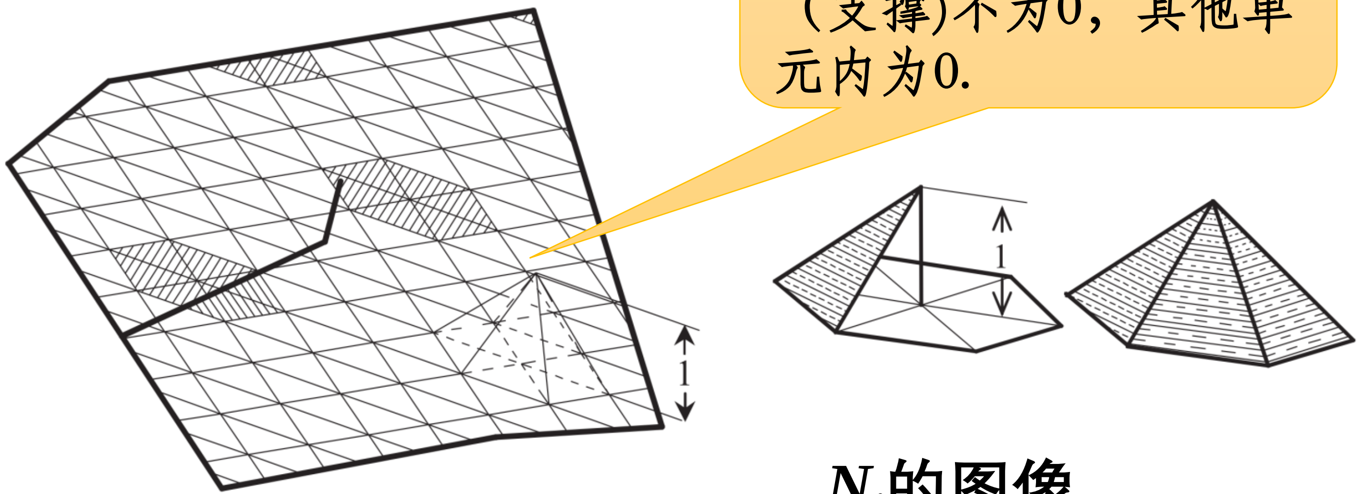
$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}_i \boldsymbol{d}_i$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{d}_i$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}$$

每个节点的形函数在包含它的所有单元内（支撑)不为0，其他单元内为0.



N_i的图像

4.3 建立刚度方程

利用虚功原理（弱形式）建立有限元方程

$$\delta U = \delta W$$

虚功原理

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega$$

应变能及
一阶变分(虚应变能)

$$W = -V = \int_{\Omega} b_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_s} t_i u_i d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} d\Gamma$$

$$\delta W = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_s} t_i \delta u_i d\Gamma = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \delta\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} d\Gamma$$

外力功及
一阶变分(外力虚功)

4.3 建立刚度方程

利用虚功原理建立有限元方程

$$\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}d\Omega=\int_{\Omega}\delta\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{b}d\Omega+\int_{\Gamma_t}\delta\boldsymbol{u}^{T}\boldsymbol{t}d\Gamma$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{d},\ \delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{d}$$

$$\delta\boldsymbol{d}^{T}\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}d\Omega\boldsymbol{d}=\delta\boldsymbol{d}^{T}\int_{\Omega}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{b}d\Omega+\delta\boldsymbol{d}^{T}\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{t}d\Gamma$$

- 这里的所有矩阵都表示成了整体的形式，没有区分单元，是有限元文献中常用的一种表示方法。但是计算仍然按照单元进行。
- 这里积分的每一项同样也可按照单元积分(积分因子用局部变量表达)然后累加的方式。

u和δu采用同样的形函数称作Galerkin法，如果二者采用不同的形函数则是一般的加权残值法(weighted residual method)。Galerkin法是一种特殊的加权残值法，也是最常用的。

4.3 建立刚度方程

利用虚功原理建立有限元方程

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_E & \boldsymbol{K}_{EF}\\ \boldsymbol{K}_{EF}^T & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{d}^T\int_\Omega \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,d\Omega\boldsymbol{d}=\delta\boldsymbol{d}^T\int_\Omega \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{b}\,d\Omega+\delta\boldsymbol{d}^T\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{t}\,d\Gamma$$

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_E\\ \boldsymbol{d}_F\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_E\\ \boldsymbol{f}_F\end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}=\delta\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{F}$$

$\delta\mathbf{d}$表示满足几何方程和本质边界条件的任意微小节点位移向量。

$$\boldsymbol{r}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_E\\ \boldsymbol{r}_F\end{bmatrix}$$

$$\delta\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{d}-\boldsymbol{F}$$

考虑$\delta\mathbf{d}_F$的任意性， $\boldsymbol{r}_F=\mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_E & \boldsymbol{K}_{EF}\\ \boldsymbol{K}_{EF}^T & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_E\\ \boldsymbol{d}_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_E+\boldsymbol{r}_E\\ \boldsymbol{f}_F\end{bmatrix}$$

4.3 建立刚度方程

- 虚功原理等价于最小势能原理；
- 虚功原理和最小势能原理建立的方程完全一致；
- 弱形式建立方程的方法更通用(有些偏微分方程不存在对应的变分原理)；
- 建立合理的弱形式是有限元分析的关键技术之一。
- 建立刚度方程过程中未特别指定单元（矩阵$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{B}$）的形式，因此上述流程适用于三维弹性的情况，适用于所有类型的单元。针对具体问题采用相应单元矩阵的具体表达式即可。

4.3 建立刚度方程

➢ 单元刚度矩阵及其性质

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{eT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^e t\,dxdy = \boldsymbol{B}^{eT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^e tA = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} & \boldsymbol{K}_{im} \\ \boldsymbol{K}_{ji} & \boldsymbol{K}_{jj} & \boldsymbol{K}_{jm} \\ \boldsymbol{K}_{mi} & \boldsymbol{K}_{mj} & \boldsymbol{K}_{mm} \end{bmatrix}$$

这里每一个$\boldsymbol{K}_{ij}$都是一个子矩阵，对于二维弹性体，是一个2*2的子矩阵。

$$\boldsymbol{B}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_i & \boldsymbol{B}_j & \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i,j,m)$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{E_0}{(1-\nu_0^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_0)/2 \end{bmatrix}$$

◆ 单元刚度分块矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{K}_{rs} = \boldsymbol{B}_r^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_s tA = \frac{E_0 t}{4(1-\nu_0^2)A}\begin{bmatrix} K_1 & K_3 \\ K_2 & K_4 \end{bmatrix} \qquad (r,s=i,j,m)$$

$$K_1 = b_r b_s + \frac{1-\nu_0}{2}c_r c_s$$

$$K_2 = \nu_0 c_r b_s + \frac{1-\nu_0}{2}b_r c_s$$

$$K_3 = \nu_0 b_r c_s + \frac{1-\nu_0}{2}c_r b_s$$

$$K_4 = c_r c_s + \frac{1-\nu_0}{2}b_r b_s$$

4.3 建立刚度方程

- $(\boldsymbol{K}_{sr})^T = \boldsymbol{K}_{rs}$，所以$\boldsymbol{K}^e$是对称矩阵，以对角线为对称轴；
- $\boldsymbol{K}^e$是6×6的方阵，$\boldsymbol{F}^e$中每一个元素都表示发生单元结点位移时所引起的结点力；

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{26} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ K_{61} & K_{62} & \cdots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

单元结点平衡方程

令 $d_1 = 1(u_i = 1), d_2 = d_3 = \cdots = d_6 = 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{Bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ \vdots \\ K_{61} \end{Bmatrix}_{d_1=1} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_6 \end{Bmatrix}$$

第一列元素的物理意义:当d_1=1时，其他结点位移为零，需要在单元各结点位移方向上施加结点力的大小.

4.3 建立刚度方程

- 元素 K_{ij} 的物理意义:当单元的第 j 个结点位移为单位位移而其他结点位移为零时，需要在单元第 i 结点位移方向上施加的结点力的大小。
- 单元刚度矩阵是奇异的，不存在逆矩阵；
  物理解释：单元平衡时，结点力相互不独立，必须满足三个平衡方程，6×6的单元刚度矩阵因此只有3行（列）是独立的；
- 主元恒正：
  物理解释：要使结点位移 d_i=1 ,施加在 d_i方向的结点力必须与位移 d_i同向。

4.3 建立刚度方程

➢ 单元等效结点荷载列阵

有限元中，同结构力学类似，须将作用于单元中的外荷载向结点移置，化为等效结点荷载

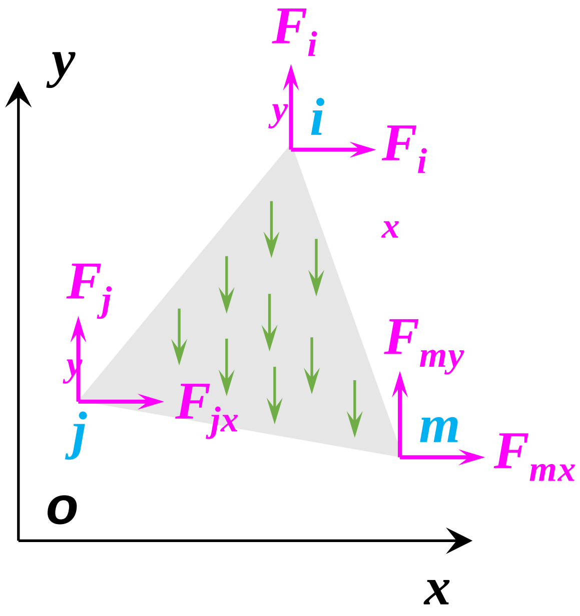
□变形体静力等效原则——在任意的虚位移上，使原荷载与移置荷载的虚功相等。

$$\delta \boldsymbol{d}^e \boldsymbol{F}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} t dx dy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{t} t dS$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}^e &= \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e \\ &= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dx dy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} t dS \end{aligned}$$

4.3 建立刚度方程

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e$$
$$= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dx dy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} t dS$$



※ 均质等厚单元的自重(体积力)

$$\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{F}_\rho^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_i \\ \boldsymbol{F}_j \\ \boldsymbol{F}_m \end{Bmatrix}_\rho = \int_{\Omega_e} \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_i \\ \boldsymbol{N}_j \\ \boldsymbol{N}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho g \end{Bmatrix} t dx dy$$

4.3 建立刚度方程

◆ 各节点的等效节点荷载

$$\boldsymbol{F}_{i\rho}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_{ix}\\ \boldsymbol{F}_{iy}\end{Bmatrix}_{\rho}=\int_{\Omega_e}\begin{bmatrix}N_i & 0\\ 0 & N_i\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ -\rho g\end{Bmatrix}tdxdy$$

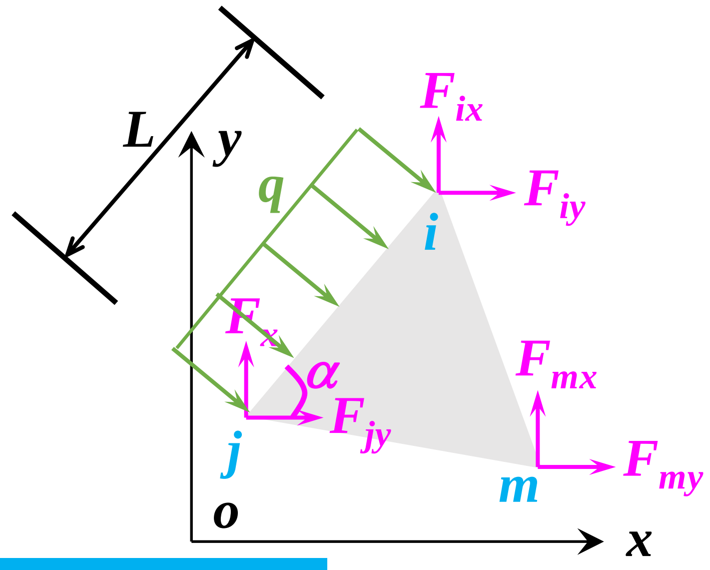
$$=\begin{Bmatrix}0\\ -\int_{\Omega_e}N_i\rho gtdxdy\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ -\frac{1}{3}\rho gtA\end{Bmatrix}\qquad(i,j,m)$$

◆ 等效结点荷载列阵

$$\boldsymbol{F}_{\rho}^{e}=-\frac{1}{3}\rho gtA\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}$$

4.3 建立刚度方程

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e$$
$$= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dx dy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} t dS$$



※ 均布侧压作用在单元边界ij上(面力)

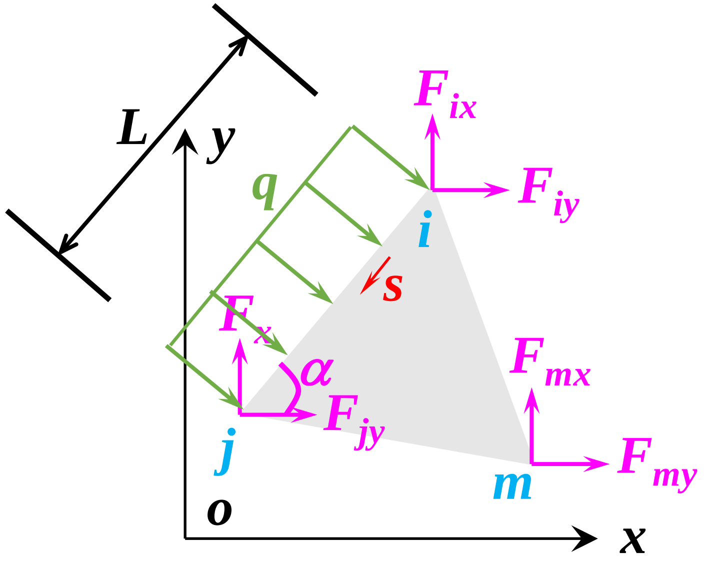
◆ 单元边上的面积力

$$\boldsymbol{t} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q \sin\alpha \\ -q\cos\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{q}{L}(y_i - y_j) \\ \dfrac{q}{L}(x_j - x_i) \end{Bmatrix}$$

4.3 建立刚度方程

- 单元边界上取局部坐标 **s**，沿 *ij*边插值函数为

$$N_i = 1 - \frac{s}{L}, N_j = \frac{s}{L}, N_m = 0$$



- 节点等效节点荷载

$$F_{ix} = \int_l N_i q_x t ds = \int_l \left(1 - \frac{s}{l}\right) q_x t ds = \frac{t}{2} q\left(y_i - y_j\right)$$

$$F_{iy} = \frac{t}{2} q\left(x_j - x_i\right)$$

$$F_{jx} = \int_l N_j q_x t ds = \int_l \frac{s}{l} q_x t ds = \frac{t}{2} q\left(y_i - y_j\right)$$

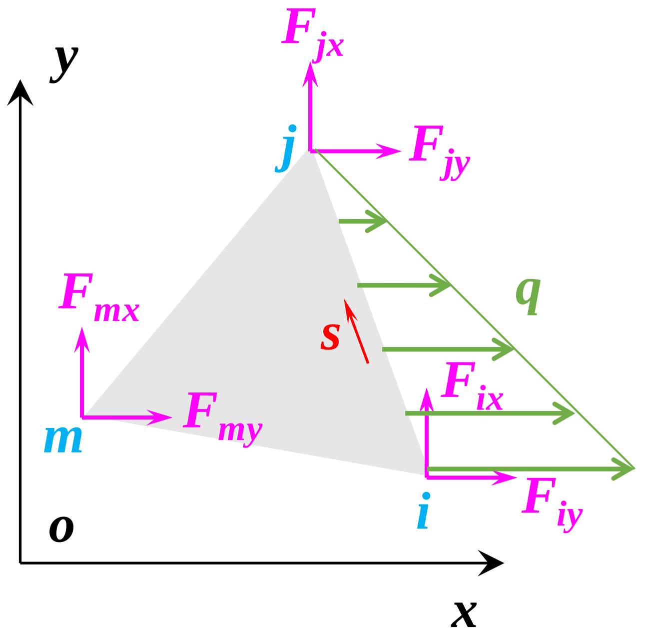
$$F_{jy} = \frac{t}{2} q\left(x_j - x_i\right)$$

$$F_{mx} = F_{my} = 0$$

$$\boldsymbol{F}_q^e = \frac{1}{2} qt \begin{bmatrix} y_i - y_j & x_j - x_i & y_i - y_j & x_j - x_i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

4.3 建立刚度方程

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dx dy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} t dS$$



※ ij边上x方向三角形荷载(面力)

- 单元边上的面积力

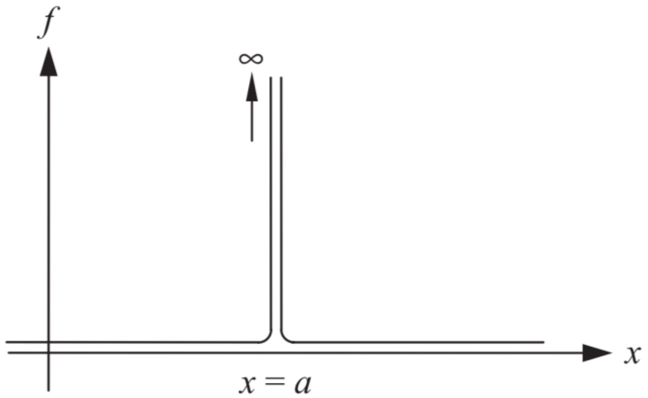
$$\boldsymbol{t} = \begin{Bmatrix} \left(1 - \dfrac{s}{l}\right) q \\ 0 \end{Bmatrix}$$

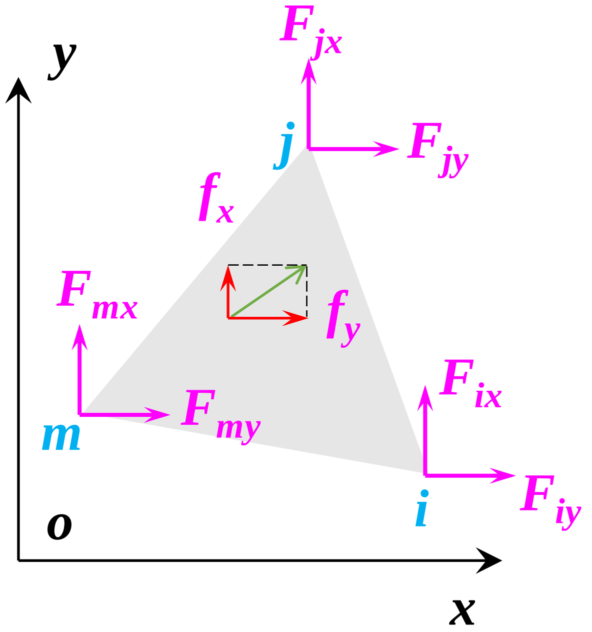
- 等效结点荷载

$$\boldsymbol{F}_q^e = \frac{1}{2} q l t \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & 0 & \dfrac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

4.3 建立刚度方程

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}_b^e + \boldsymbol{F}_s^e$$
$$= \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dxdy + \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{t} t dS$$





※ 作用在$x_0(x_0,y_0)$的集中力$f(f_x, f_y)$

用Dirac delta函数定义一个新的体积力，用它代替集中力。

Dirac delta函数的性质1：在处为无穷大。

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{f}\delta(x, y)$$

性质2

$$\int_{\Omega} g(x,y)\delta(x,y)d\Omega = g(x_0, y_0)$$

$$\boldsymbol{F}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{b} t dxdy = \boldsymbol{N}(x_0, y_0)^T \boldsymbol{f}(x_0, y_0) t$$

Ω为包含(x_0,y_0)的一个区域。

4.3 建立刚度方程

组装(assemble)

◆ 整体刚度矩阵和节点荷载列阵由单元刚度矩阵和单元等效节点荷载列阵集成，通过转换矩阵**L**来实现：

刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}=\sum_{e}\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{K}^{e}\boldsymbol{L}$$

荷载向量

$$\boldsymbol{L}^{T}\boldsymbol{K}^{e}\boldsymbol{L}=\begin{array}{c}1\\ \vdots\\ i\\ \vdots\\ j\\ \vdots\\ \vdots\\ m\\ \vdots\\ n\end{array}\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \boldsymbol{I}&\vdots&\vdots\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\vdots\\ \vdots&\boldsymbol{I}&\vdots\\ \vdots&\mathbf{0}&\vdots\\ \vdots&\vdots&\mathbf{0}\\ \vdots&\vdots&\boldsymbol{I}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \vdots&\vdots&\vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{ii}&\boldsymbol{K}_{ij}&\boldsymbol{K}_{im}\\ \boldsymbol{K}_{ji}&\boldsymbol{K}_{jj}&\boldsymbol{K}_{jm}\\ \boldsymbol{K}_{mi}&\boldsymbol{K}_{mj}&\boldsymbol{K}_{mm}\end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccccc}1&\cdots\cdots&&i&\cdots\cdots&j&\cdots&m&\cdots&n\end{array}\\ \begin{bmatrix}\mathbf{0}&\cdots&\mathbf{0}&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \mathbf{0}&\cdots&\cdots&\cdots&0&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&\cdots&\cdots&\cdots\\ \mathbf{0}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&\boldsymbol{I}&\mathbf{0}&\cdots\end{bmatrix}\end{array}$$

4.3 建立刚度方程

局部编号		整体编号
i	⟷	o
j	⟷	p
m	⟷	q

$$
L^T K^e L = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ o \\ \vdots \\ p \\ \vdots \\ q \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & \cdots & o & \cdots & p & \cdots & q & \cdots & n \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & K_{ii} & \cdots & K_{ij} & \cdots & K_{im} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & K_{ji} & \cdots & K_{jj} & \cdots & K_{jm} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & K_{mi} & \cdots & K_{mj} & \cdots & K_{mm} & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

这里每一个$\boldsymbol{K}_{ij}$都是一个子矩阵，对于二维弹性体，是一个2*2的子矩阵。**0**也是矩阵。

其中 n 为结点总数；i、j、m为单元结点编号。

- 实际编程中，只需对每个节点进行**整体编号**，建立局部编号与整体编号的**联系**，求得单元刚度矩阵后，**按照整体编号累加**到整体刚度矩阵即可。可以证明两种方法得到的结果一致。

4.3 建立刚度方程

局部编号		整体编号
i	$\Longleftrightarrow$	o
j	$\Longleftrightarrow$	p
m	$\Longleftrightarrow$	q

$$
L^T F^e = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ o \\ \vdots \\ p \\ \vdots \\ \vdots \\ q \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & I & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \\ F_m^e \end{Bmatrix}
= \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ o \\ \vdots \\ p \\ \vdots \\ \vdots \\ q \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F_i^e \\ \vdots \\ F_j^e \\ \vdots \\ \vdots \\ F_m^e \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

- 同整体刚度矩阵的集成，**按照整体编号累加**到整体荷载列阵即可。

4.3 建立刚度方程

◆ 整体刚度矩阵的**特点**

◆对称性：由Galerkin法性质决定。

◆对角线元素为正（刚度的正定性）。

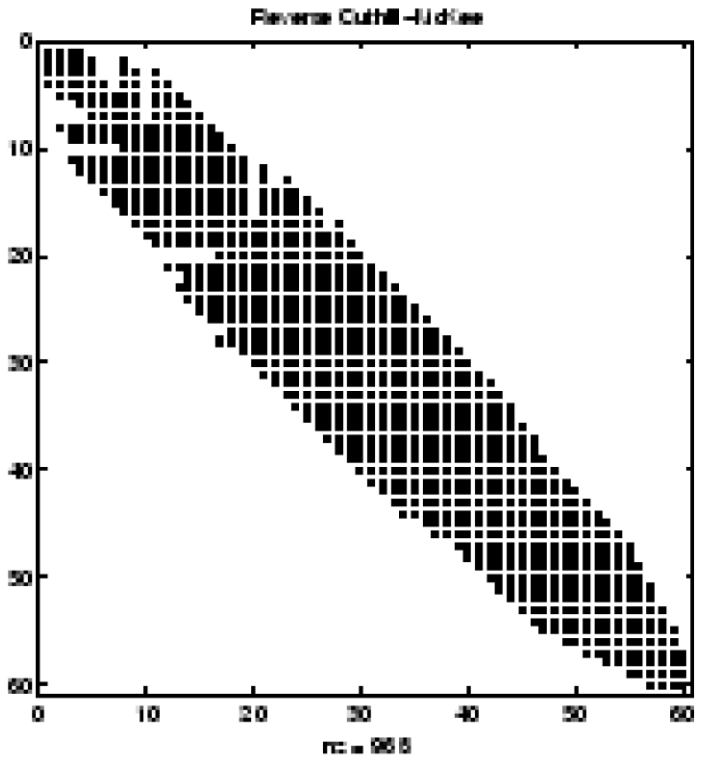
◆奇异性（需要施加边界条件）-零能模式。

◆稀疏性：由局部插值的特性决定。

◆非零元素呈带状分布（节点编号合理）。

◆半正定($d^TKd \geq 0$)，消除刚体位移后对称正定。

◆每行元素之和为0(证明：刚体位移引起的应变能为0)。



4.4 本质边界条件处理

◆ 零能模式： 0特征值对应的特征向量**Kd=λd**，也是产生的应变能为0的位移模式。

$$\boldsymbol{Kd}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad W_{\text{int}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{T}\boldsymbol{Kd}=0$$

◆ 对于弹性力学方程来说，零能模式指的是刚体位移对应的位移模式——刚体位移不产生应变(没有变形)，因此对应应变能为0。施加本质边界条件的过程是消除刚体位移的过程，也就是消除零能模式的过程。

4.4 本质边界条件处理

- 由于零能模式没有应变，因此没有应力，从而满足平衡方程，进而也满足有限元的刚度方程，因此，零能模式对应的特征值为**0**。这也是零能模式通过特征值问题求解的原因。
- 对于平面弹性体来说，有**3**种刚体位移模式，平面内两个方向的平动和转动。例如，x方向平动u_0对应的为模式为$\mathbf{d}=\{u_0, 0, u_0, 0, \ldots, u_0, 0\}$, y方向平动v_0对应的为模式为$\mathbf{d}=\{0, v_0, 0, v_0, \ldots, 0, v_0\}$, 这是两种典型的零能模式。

4.4 本质边界条件处理

➢ 位移边界条件的施加

◆ 求解位移场的问题，需要引入消除刚体位移的边界条件，用以消除整体刚度矩阵的奇异性。

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}$$

一. 直接代入法

将已知结点位移的自由度消去，得到修正方程，用以求解其他结点位移。其原理是重新组合方程：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{aa} & \boldsymbol{K}_{ab} \\ \boldsymbol{K}_{ba} & \boldsymbol{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}_a \\ \boldsymbol{d}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_a \\ \boldsymbol{F}_b + \boldsymbol{r}_b \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{d}_a$待定结点位移　　$\boldsymbol{d}_b$已知结点位移

4.4 本质边界条件处理

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_a \\ d_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b + r_b \end{Bmatrix} \Rightarrow K_{aa} d_a + K_{ab} d_b = F_a$$

$$\xrightarrow{d_b \text{ 已知}} K^* d^* = F^*$$

$$K^* = K_{aa} \quad d^* = d_a \quad F^* = F_a - K_{ab} d_b$$

重组方程后，将已知项和未知项分别移置到方程的右边和左边。重组的方程阶数低了，但是结点位移的顺序已被破坏，导致程序编制困难。

4.4 本质边界条件处理

最常用的方法

二. 对角元素改1法（划零置一法）

如果给定的位移值不是0，那么1)将给定位移值乘以响应列移到方程右边;2)相应行仍然取0，对角元素置1;3)对应行的右端项为给定的位移值。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{array} &
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & \cdots & 0 & \cdots & K_{1n} \\
K_{21} & K_{22} & \cdots & 0 & \cdots & K_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
K_{n1} & K_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & K_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} f_1 - K_{1j} d_j \\ f_2 - K_{2j} d_j \\ \vdots \\ \bar{d}_j \\ \vdots \\ f_n - K_{nj} d_j \end{Bmatrix}
\end{array}
$$

4.4 本质边界条件处理

三. 对角元乘大数法(罚函数法,penalty method)

结点位移为给定值$d_j = \bar{d}_j$ 时，第 j 个方程作如下改动：
对角元素K_{jj}中乘以大数 α，并将P_j用$\alpha K_{jj}\bar{d}_j$取代。

$$
\begin{array}{c} 1\\ 2\\ \vdots\\ j\\ \vdots\\ n \end{array}
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & K_{1n}\\
K_{21} & K_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & K_{2n}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
K_{j1} & K_{j2} & \cdots & \alpha K_{jj} & \cdots & K_{jn}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
K_{n1} & K_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & K_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_j\\ \vdots\\ a_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ \alpha K_{jj}\bar{d}_j\\ \vdots\\ f_n \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \end{matrix}
$$

4.4 本质边界条件处理

修改后的第j个方程变成：

$$\boxed{K_{j1}d_1 + K_{j2}d_2 + \cdots + \alpha K_{jj}d_j + \cdots + K_{jn}d_n = \alpha K_{jj}\bar{d}_j}$$

由于$\alpha K_{jj} \gg K_{ji}(i \neq j)$，因此近似有

$$\boxed{\alpha K_{jj}d_j \approx \alpha K_{jj}\bar{d}_j}$$

也即：

$$\boxed{d_j = \bar{d}_j}$$

这种方法对于任意给定位移均适用，且不改变方程的阶数和结点位移顺序，虽不是精确满足，但程序编制方便，使用广泛。缺点是过小的参数导致计算精度差，过大的参数可能导致刚度矩阵奇异。

4.4 本质边界条件处理

➢ 线性方程组的求解及后续计算

- 施加边界条件后，消除了整体刚度矩阵的奇异性，进而可以解得结构的节点位移**d**。

$$\boxed{\boldsymbol{Kd} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}}$$

- 求得节点位移后，可用下式求得单元的应力应变：

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{N}^e\boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{B}^e\boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D\varepsilon} = \boldsymbol{DB}^e\boldsymbol{d}^e = \boldsymbol{S}^e\boldsymbol{d}^e$$

- 三角形为常应变单元，应力精度较差，可使用一些应力磨平技术进行处理。

➢ 线性方程组的解法

- 小型问题可以采用直接法，大型问题一般采用迭代法。

大型软件应用

有限单元法（finite element method）

刘治军 青年研究员

土木工程系

liuzhijun@lzu.edu.cn

第5讲 典型单元分析

本讲内容

5.1 引言

5.2 一维单元

5.3 二维单元

5.4 三维单元

典型单元分析

$$\boldsymbol{u} = \boxed{\boldsymbol{N}^e} \boldsymbol{d}^e$$

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{N}_1 \quad \boldsymbol{N}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{N}_m]$$

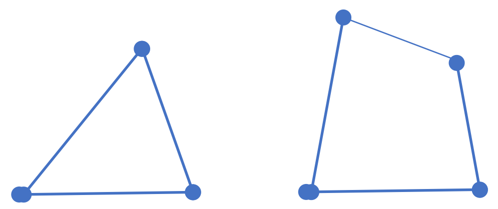
$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I} N_i$$

$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。

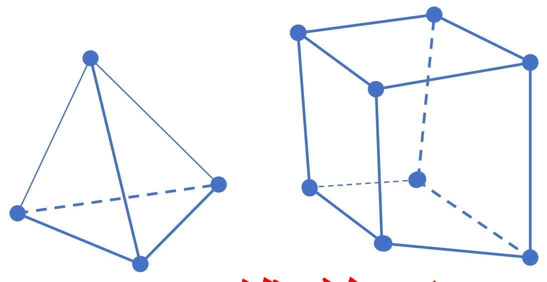
➢ 单元类型

- 单元类型对问题的求解影响很大，影响包括：网格划分难易、数值积分方式、求解精度等；
- 单元类型的选择依赖于结构的几何特点、方程的类型、所希望的求解精度等；
- 从几何形状上区分，单元类型可分为一维、二维和三维：

一维单元



二维单元



三维单元

➢ 一维单元 >> Lagrange单元

- 对于具有n节点的一维单元，节点参数只包含场函数的节点值，单元内场函数可插值表示为：

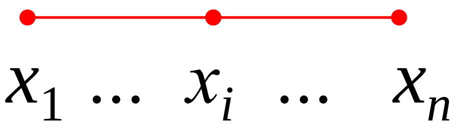
$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i$$

$x_1 \ \dots \ x_i \ \dots \ x_n$

- 插值函数性质

$$N_i\left(x_j\right) = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^{n} N_i\left(x\right) = 1$$

Kronecker delta性质和partition of unity(单位分解)是大多数单元都满足的条件。



- **插值函数$N_i(x)$的构造：Lagrange插值多项式**

$$N_i(x)=l_i^{(n-1)}(x)=\prod_{j=1,\,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

- **$l_i^{(n-1)}(x)$的上标（n-1）表示Lagrange插值多项式的次数，n是单元的节点数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个节点的坐标**

$$N_i(x) = l_i^{(n-1)}(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

Kronecker delta
性质是显然的。

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$$h = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{(n-1)} x^{(n-1)}$$

Partition of unity证明:
n个lagrange多项式的和为n-1阶多项式，而这个n-1阶多项式在n个节点上的值都是1，又因为在n个点上的值确定的n-1阶多项式唯一，所以它的值在整个定义域上都为1。

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{(n-1)} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

系数矩阵对应行列式为Vandermonde（范德蒙德）行列式

$$N_i(x) = l_i^{(n-1)}(x) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i$$

拉格朗日单元内部可构造高阶连续的插值函数，
但是单元间始终为C0连续性！

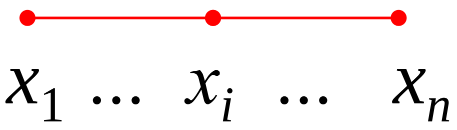
注意！这里每个单元中包含n个节点，而不
是每两个节点形成一个单元。

当n=2时：　线性单元

$$\phi=\sum_{i=1}^{2} l_i^{(1)}\left(x\right)\phi_i=\frac{\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_2\right)}\phi_1+\frac{\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_1\right)}\phi_2$$

◆ 若采用局部坐标（也称长度坐标或自然坐标）

$$\xi=\frac{x-x_1}{x_n-x_1}=\frac{x-x_1}{l} \qquad 0\le\xi\le1$$



其中l代表单元的长度，且有：

$$l_i^{(n-1)}\left(\xi\right)=\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{\xi-\xi_j}{\xi_i-\xi_j}=\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

当**n=2**时，$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1$

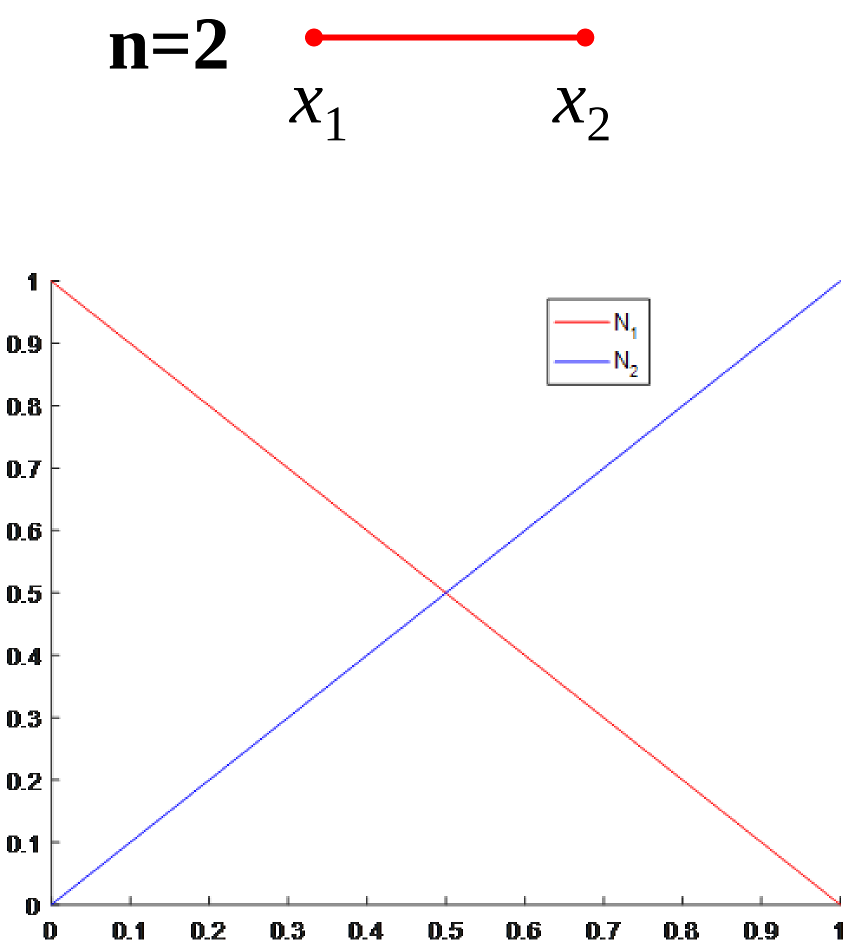
$$l_1^{(1)} = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = 1 - \xi, \quad l_2^{(1)} = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \xi$$

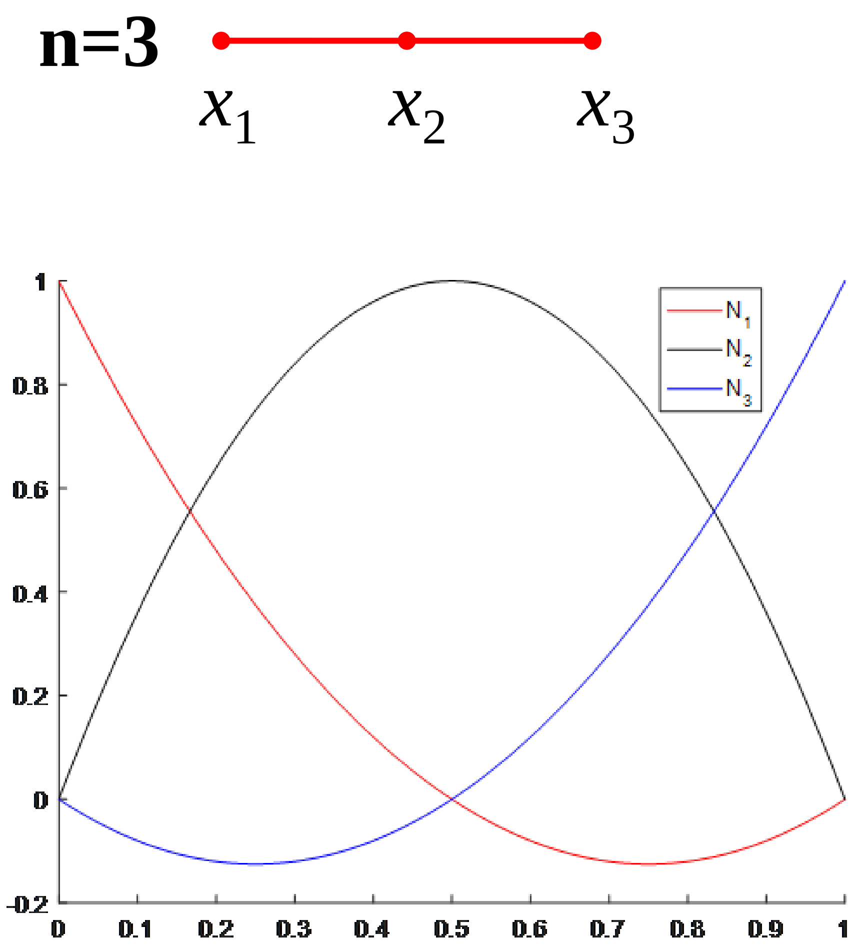
当 **n=3**，且$x_2 = (x_1 + x_3)/2$时，$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1/2,$ $\xi_3 = 1$

$$l_1^{(1)} = \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = 2\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1)$$

$$l_2^{(2)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = -4\xi(\xi - 1)$$

$$l_3^{(2)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = 2\xi\left(\xi - \frac{1}{2}\right)$$

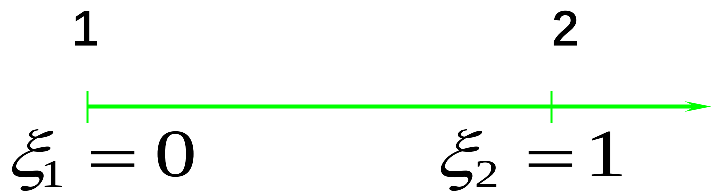

n=2
x_1
x_2
N_1
N_2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


n=3
x_1
x_2
x_3
N_1
N_2
N_3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

➢ 一维单元 >> 1阶Hermite单元

- 节点参数包含场函数及其导数的节点值，采用**Hermite**多项式作为插值函数，能保证场函数导数的连续性。
- 对于只有两个端结点的一维单元，**Hermite** 插值表达式为：

$$\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{2}H_i^{(0)}(\xi)\phi_i+\sum_{i=1}^{2}H_i^{(1)}(\xi)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_i$$



$$\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{2}H_i^{(0)}(\xi)\phi_i+\sum_{i=1}^{2}H_i^{(1)}(\xi)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_i$$

Hermite 插值满足条件：

$$H_i^{(0)}(\xi_j)=\delta_{ij},\quad \left.\frac{dH_i^{(0)}(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi_j}=0$$

$$H_i^{(1)}(\xi_j)=0,\quad \left.\frac{dH_i^{(1)}(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi_j}=\delta_{ij}$$

令 $\phi=\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\beta}$

$$\boldsymbol{\psi}=\begin{bmatrix}1 & \xi & \xi^2 & \xi^3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4\end{bmatrix}^T$$

根据节点处的场函数值以及其导数值，可以反解系数的值的值。

$$\phi(\xi) = \sum_{i=1}^{2} H_i^{(0)}(\xi)\phi_i + \sum_{i=1}^{2} H_i^{(1)}(\xi)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_i$$

$$= N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_1 + N_4\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)_2$$

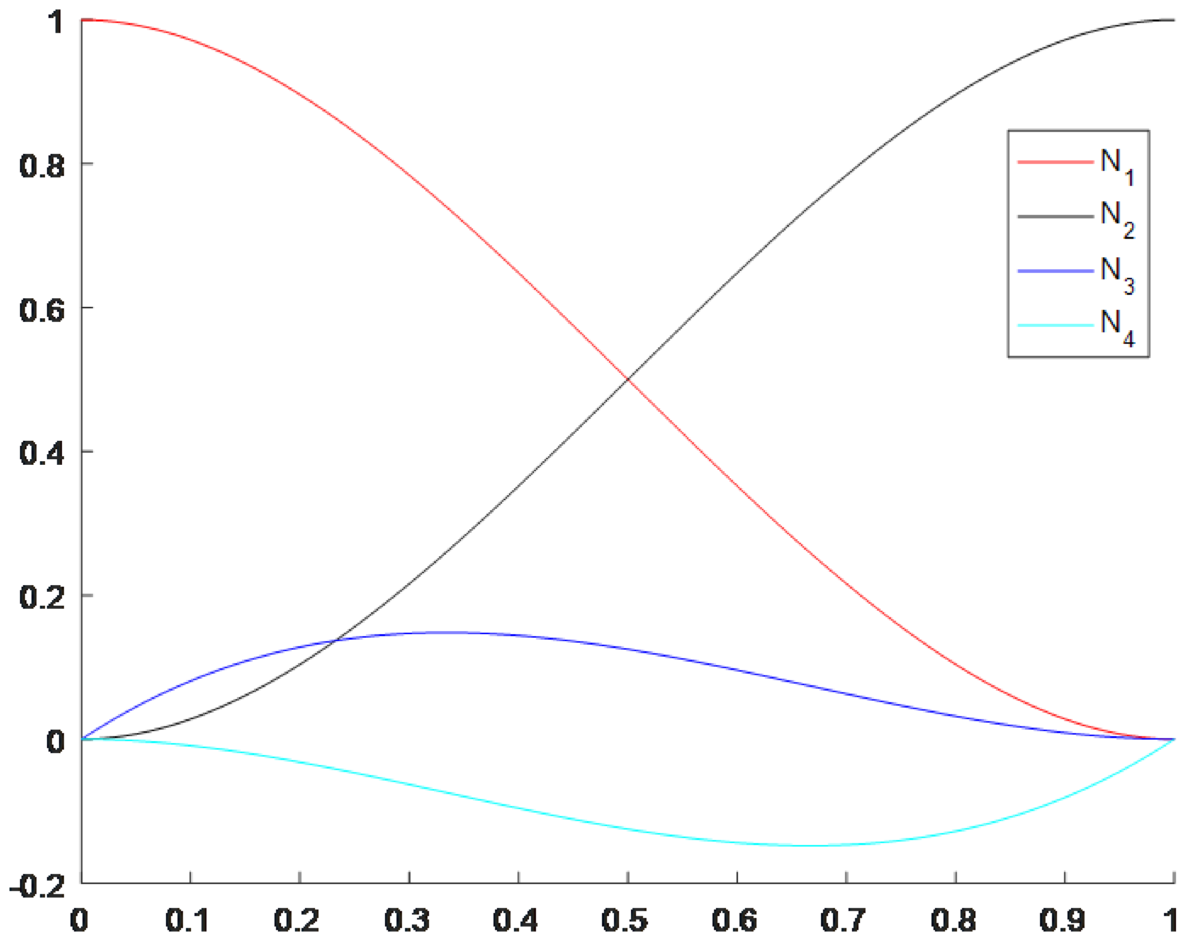
确定待定系数

$$\begin{cases} N_1 = H_1^{(0)}(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2 = H_2^{(0)}(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_3 = H_1^{(1)}(\xi) = \xi - 2\xi^2 + \xi^3 \\ N_4 = H_2^{(1)}(\xi) = -\xi^2 + \xi^3 \end{cases}$$

$$N_1 + N_2 = 1$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \neq 1$$

一阶Hermite插值函数



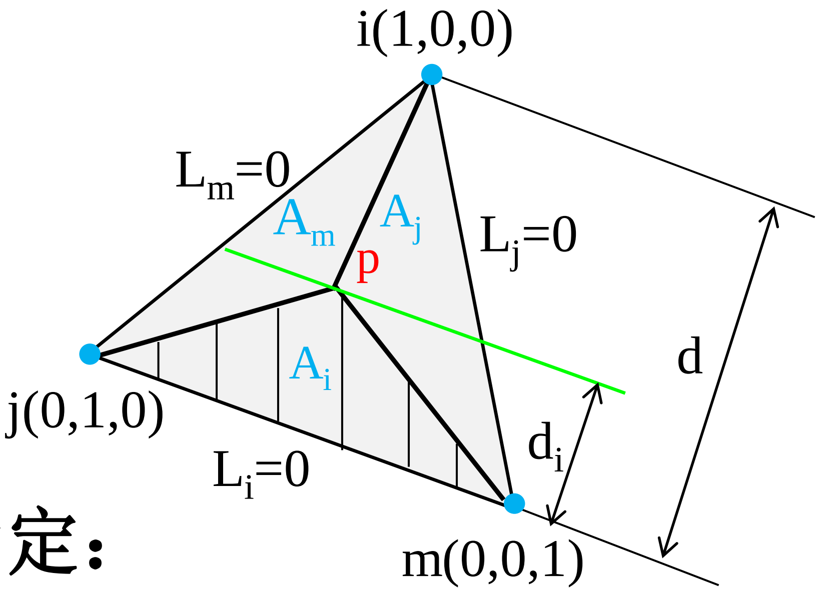
1阶Hermite单元特点：
单元之间满足C_1连续性。

可以按照同样的方法构造更高阶的Hermite单元。

➢ 二维单元 >> 线性三角形单元（面积坐标）

注意！
*ijm*按
照逆时
针顺序

- 三角形插值函数也可以采用局部的自然坐标来构造三角形插值函数——面积坐标，运算更为简单。



点 **p**(*x*,*y*)的位置用三个比值确定：

$$L_i = \frac{\Delta pjm}{\Delta} = \frac{A_i}{A} \qquad L_j = \frac{\Delta pmi}{\Delta} = \frac{A_j}{A} \qquad L_m = \frac{\Delta pij}{\Delta} = \frac{A_m}{A}$$

Natural coordinates

$$A_i + A_j + A_m = A \quad \Rightarrow \quad L_i + L_j + L_m = 1$$

◆ 面积坐标与直角坐标的转换关系

三角形 pjm的面积：

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(x_j y_m - y_j x_m\right) + \left(y_j - y_m\right)x + \left(x_m - x_j\right)y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)
\end{aligned}
$$

$$
L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) \qquad \left(i, j, m\right)
$$

◆ 面积坐标 L_i, L_j, L_m 与3结点三角形单元的形函数 N_i, N_j, N_m 完全相同。

◆ 矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_m & b_m & c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

$$L_i + L_j + L_m = 1$$

$$x = x_i L_i + x_j L_j + x_m L_m$$

$$y = y_i L_i + y_j L_j + y_m L_m$$

代数余子式表达的行列式值的性质。

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_m \\ y_i & y_j & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_m \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

*a*为第1列代数余子式，
*b*为第2列代数余子式，
*c*为第3列代数余子式。

$$x_i L_i + x_j L_j + x_m L_m = \frac{1}{2A}\left(\sum a_i x_i + x\sum b_i x_i + y\sum c_i x_i\right)$$

$$\sum a_i x_i = \sum c_i x_i = 0$$
$$\sum b_i x_i = D = 2A$$

$$x_i L_i + x_j L_j + x_m L_m = x$$

◆ 面积坐标的微分运算

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_i}{\partial x} = \dfrac{\partial N_i}{\partial x} = \dfrac{b_i}{2A} \\ \dfrac{\partial L_i}{\partial y} = \dfrac{\partial N_i}{\partial y} = \dfrac{c_i}{2A} \end{cases} \qquad (i, j, m)$$

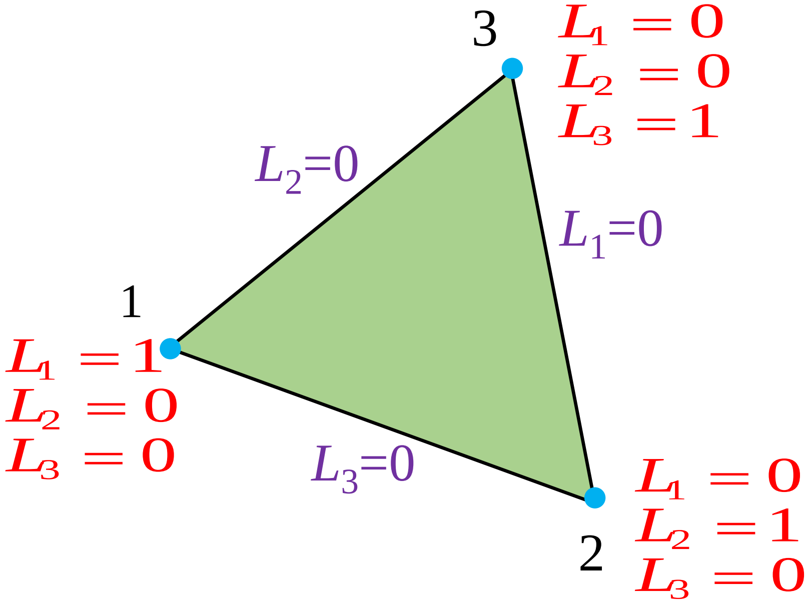
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_j}\frac{\partial L_j}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial L_m}\frac{\partial L_m}{\partial x} = \frac{1}{2A}\left(b_i \frac{\partial}{\partial L_i} + b_j \frac{\partial}{\partial L_j} + b_m \frac{\partial}{\partial L_m} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial L_i}\frac{\partial L_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_j}\frac{\partial L_j}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial L_m}\frac{\partial L_m}{\partial y} = \frac{1}{2A}\left(c_i \frac{\partial}{\partial L_i} + c_j \frac{\partial}{\partial L_j} + c_m \frac{\partial}{\partial L_m} \right)$$

◆线性三角形单元，即三节点三角形单元，也就是通常所说的三角形单元。

◆插值函数是线性函数，也就是三角形单元的三个面积坐标

$$N_1 = L_1$$
$$N_2 = L_2$$
$$N_3 = L_3$$



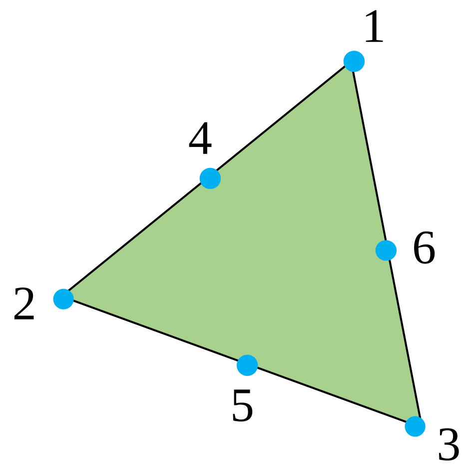
➢ 二维单元 >> 二次三角形单元

◆ 位移函数取**完全的二次多项式**：

$$\boxed{\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\beta}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{12} \end{bmatrix}^T}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 \end{bmatrix}}$$



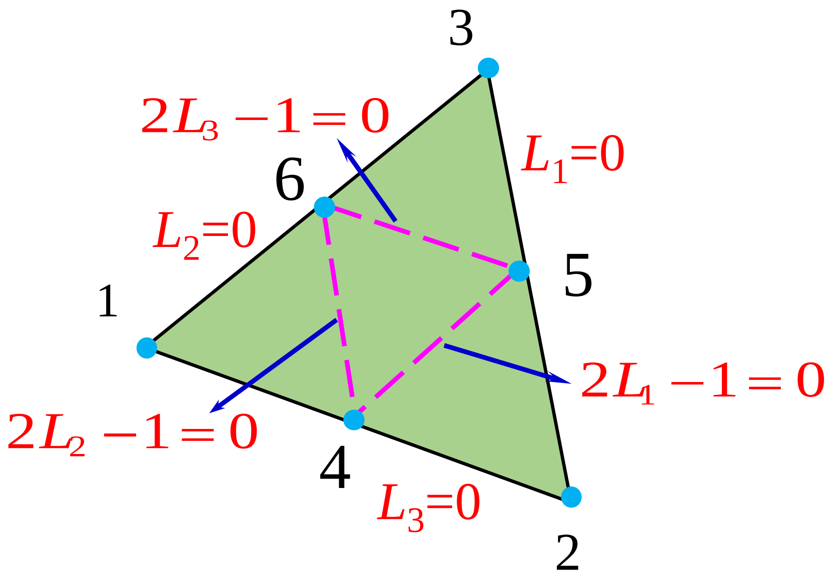
◆ 位移函数中的常数项和完整的一次多项式满足收敛条件对完备性的要求。

◆ 单元边界上位移按二次抛物线分布，三个公共结点正好保证相邻单元位移的连续性，满足协调性的要求。

协调是指满足弱形式中积分按照单元相加的要求。对于平面和三维弹性力学问题要求位移全域连续。

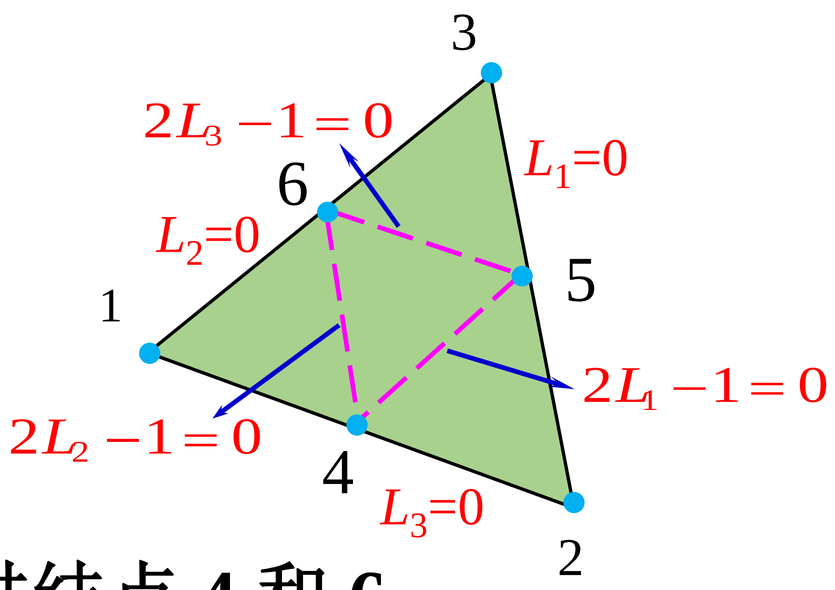
- 根据节点位移列方程，可以反解出待定系数，运算复杂。
- 若采用面积坐标，则运算可以大为简化
- 二次单元共有六个结点，构造的插值函数为

$$N_i=\prod_{j=1}^{2}\frac{f_j^{(i)}(L_1,L_2,L_3)}{f_j^{(i)}(L_{1i},L_{2i},L_{3i})}$$



- $f_j^{(i)}(L_1,L_2,L_3)$是通过除结点 i 以外所有结点的二根直线方程$f_j^{(i)}(L_1,L_2,L_3)=0$的左端项

$$N_i = \prod_{j=1}^{2} \frac{f_j^{(i)}(L_1, L_2, L_3)}{f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})}$$



当节点i=1时：

$$f_1^{(1)}(L_1, L_2, L_3) = L_1 - \frac{1}{2} = 0$$ 过结点 4 和 6

$$f_2^{(1)}(L_1, L_2, L_3) = L_1 = 0$$ 过结点 2、5 和 3

- $f_j^{(i)}(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})$中的 L_{1i}, L_{2i}, L_{3i} 是结点 i 的面积坐标

$$N_1 = \frac{f_1^{(1)}\left(L_1, L_2, L_3\right)}{f_1^{(1)}\left(1,0,0\right)} \bullet \frac{f_2^{(1)}\left(L_1, L_2, L_3\right)}{f_2^{(1)}\left(1,0,0\right)}$$

$$= \frac{L_1 - 1/2}{1/2} \bullet \frac{L_1}{1} = \left(2L_1 - 1\right) L_1$$

同理：

$$N_2 = \frac{L_2 - 1/2}{1/2} \bullet \frac{L_2}{1} = \left(2L_2 - 1\right) L_2$$

$$N_3 = \frac{L_3 - 1/2}{1/2} \bullet \frac{L_3}{1} = \left(2L_3 - 1\right) L_3$$

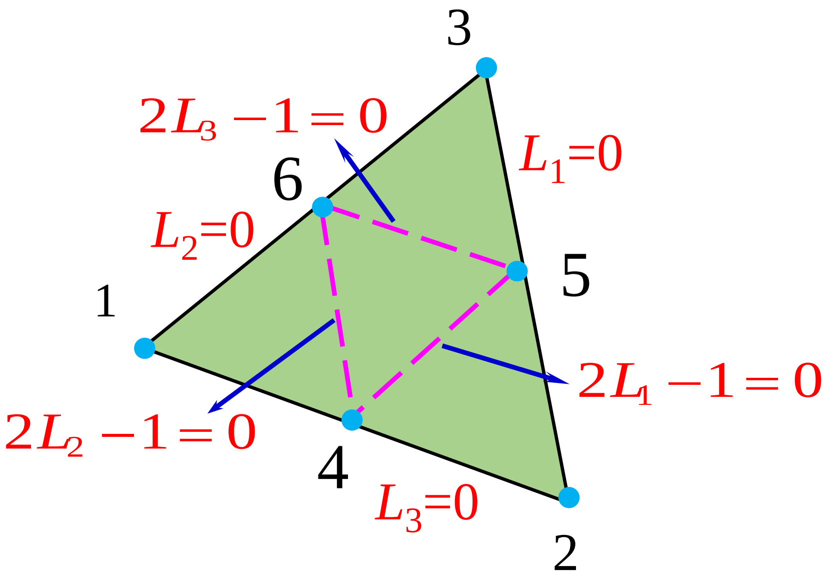
$$N_4 = \frac{L_1}{1/2} \bullet \frac{L_2}{1/2} = 4L_1 L_2$$

$$N_6 = \frac{L_3}{1/2} \bullet \frac{L_1}{1/2} = 4L_3 L_1$$

$$N_5 = \frac{L_2}{1/2} \bullet \frac{L_3}{1/2} = 4L_2 L_3$$

- 这种构造单元插值函数的方法形象地称为**划线法**

- 划线法分母可以不用一一构造，只需利用形函数在该节点为1确定。



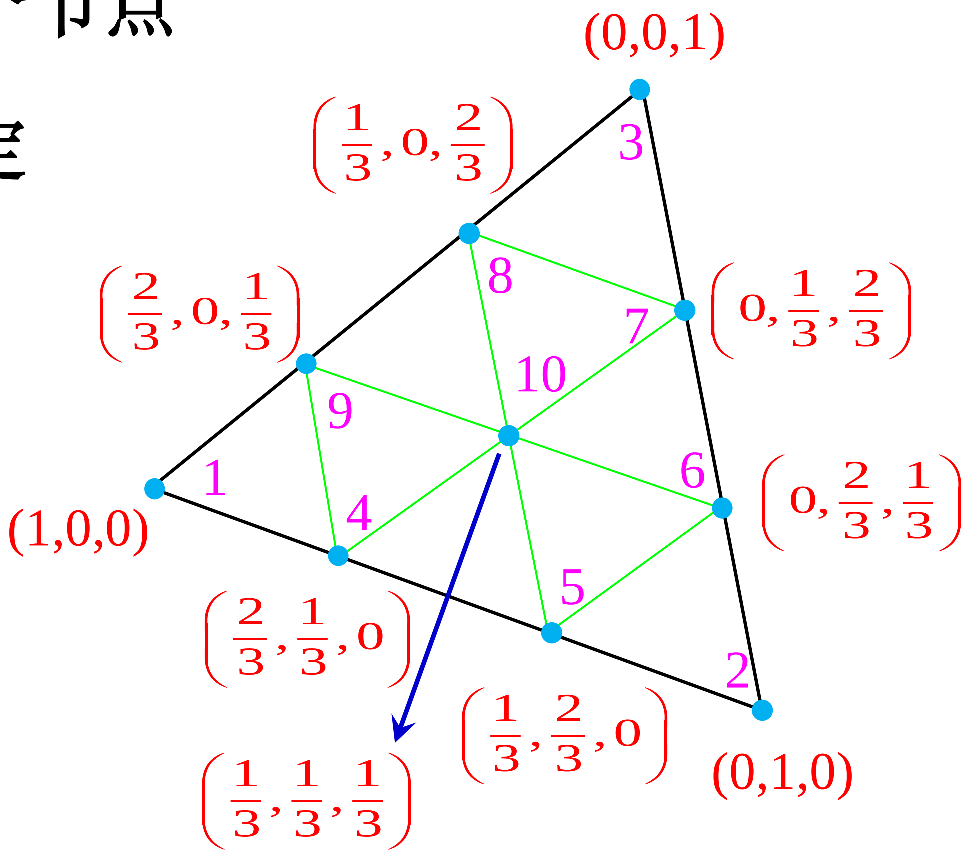
$$\boxed{N_4=\alpha L_1\bullet L_2}$$

$$\boxed{N_4(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)=\alpha\bullet\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}=1}\Rightarrow\boxed{\alpha=4}$$

➢ 二维单元 >> 三次三角形单元

- 三次三角形单元，十个节点
- 同样可以用划线法确定插值函数

$$N_4 = \frac{L_1}{2/3} \bullet \frac{L_2}{1/3} \bullet \frac{L_1 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1)$$



角点

$$N_i = \frac{L_i - 2/3}{1/3} \bullet \frac{L_i - 1/3}{2/3} \bullet \frac{L_i}{1} = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

中心结点

$$N_{10} = \frac{L_1}{1/3} \bullet \frac{L_2}{1/3} \bullet \frac{L_3}{1/3} = 27L_1L_2L_3$$

边内结点

$$N_4 = \frac{L_1}{2/3} \bullet \frac{L_2}{1/3} \bullet \frac{L_1 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_5 = \frac{L_1}{1/3} \bullet \frac{L_2}{2/3} \bullet \frac{L_2 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2 - 1)$$

$$N_6 = \frac{L_2}{2/3} \bullet \frac{L_3}{1/3} \bullet \frac{L_2 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2 - 1)$$

$$N_7 = \frac{L_2}{1/3} \bullet \frac{L_3}{2/3} \bullet \frac{L_3 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_8 = \frac{L_1}{1/3} \bullet \frac{L_3}{2/3} \bullet \frac{L_3 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_3 - 1)$$

$$N_9 = \frac{L_1}{2/3} \bullet \frac{L_3}{1/3} \bullet \frac{L_1 - 1/3}{1/3} = \frac{9}{2}L_1L_3(3L_1 - 1)$$

➢ 二维单元 >> 三角形高次单元

- 按二维域内各次完全多项式的要求确定结点的目次(n)和位置。

  由 Pascal 三角形确定(杨辉三角) (四次15节点)

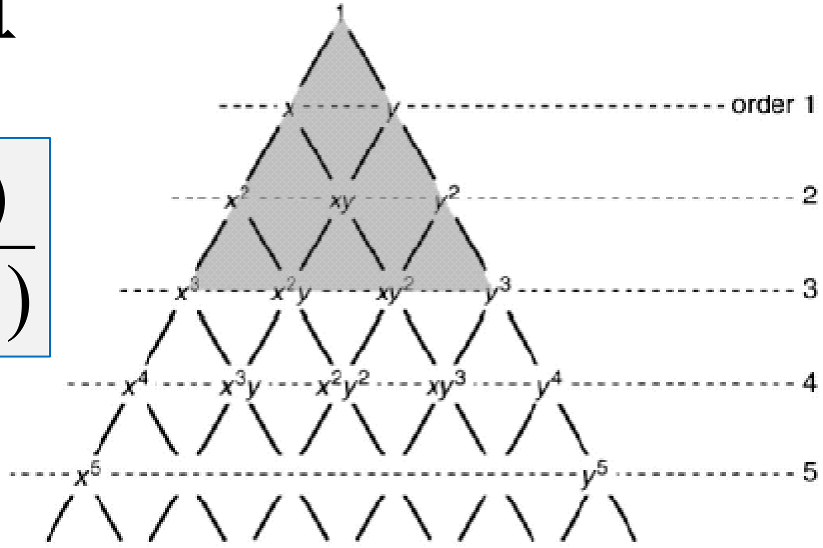
- 按广义的 Lagrange 插值公式构造插值函数

$$N_i = \prod_{j=1}^{p} \frac{f_j^{(i)}\left(L_1, L_2, L_3\right)}{f_j^{(i)}\left(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}\right)}$$

满足

$$N_i\left(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}\right) = \delta_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$$



➢ 二维单元 >> Lagrange 矩形单元

- 构造任意的 Lagrange 矩形单元插值函数的简便而系统的方法就是利用2个坐标方向适当方次 Lagrange 多项式的乘积。
- 结点布置在 n+1 列，m+1 行的规则网格上，构造与布置在 I 列 J 行结点 i (用◎表示)相应的插值函数N_i

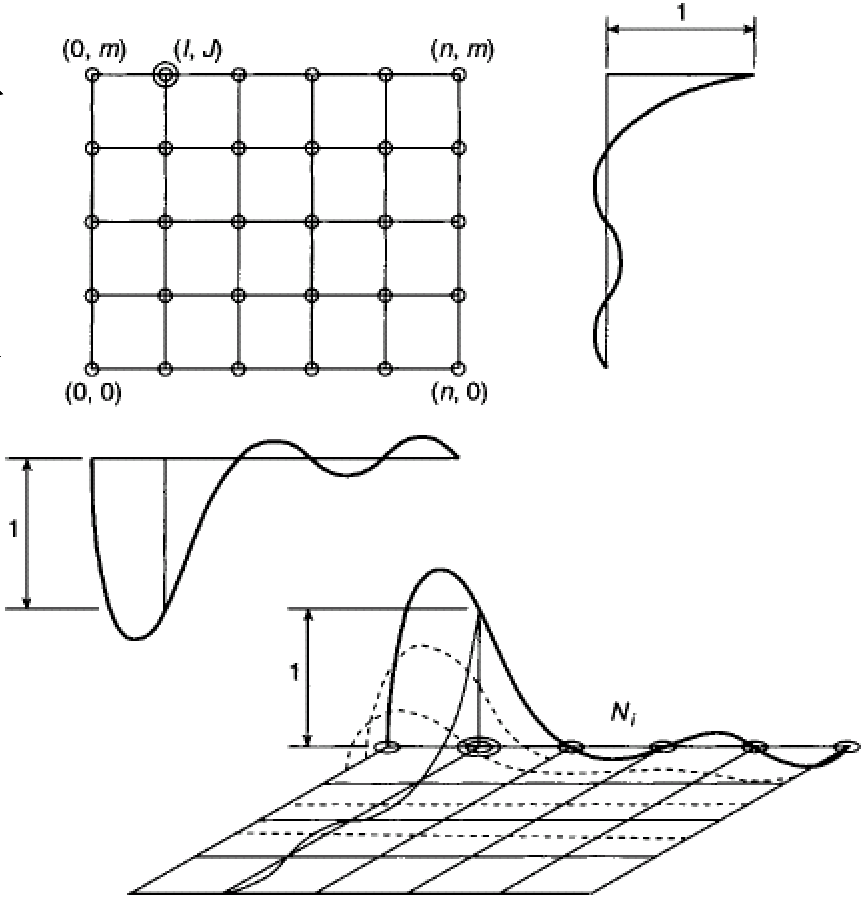


Fig. 8.6 A typical shape function for a Lagrangian element ($n = 5$, $m = 4$, $I = 1$, $J = 4$).

两个方向的Lagrange 多项式分别为：

$$l_I^{(n)}(\xi)=\frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)\cdots(\xi-\xi_{I-1})(\xi-\xi_{I+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_I-\xi_0)(\xi_I-\xi_1)\cdots(\xi_I-\xi_{I-1})(\xi_I-\xi_{I+1})\cdots(\xi_I-\xi_n)}$$

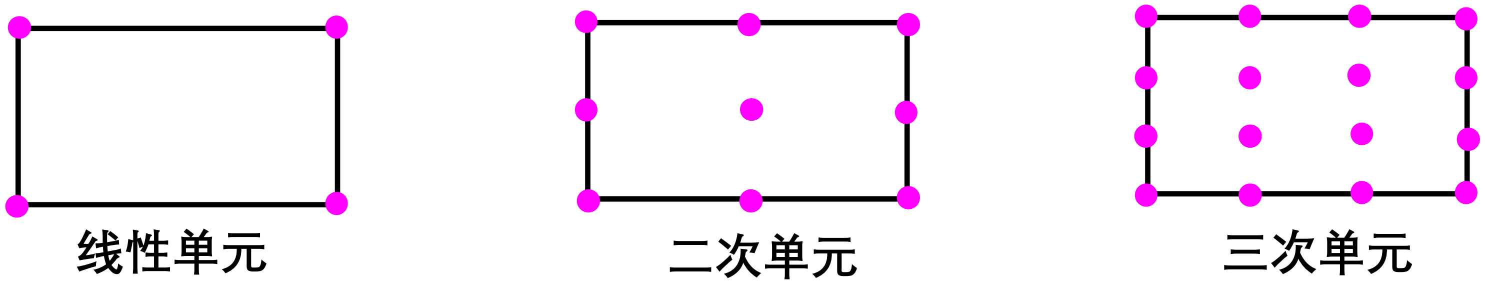
$$l_J^{(m)}(\eta)=\frac{(\eta-\eta_0)(\eta-\eta_1)\cdots(\eta-\eta_{J-1})(\eta-\eta_{J+1})\cdots(\eta-\eta_m)}{(\eta_J-\eta_0)(\eta_J-\eta_1)\cdots(\eta_J-\eta_{J-1})(\eta_J-\eta_{J+1})\cdots(\eta_J-\eta_m)}$$

则可以构造插值函数：

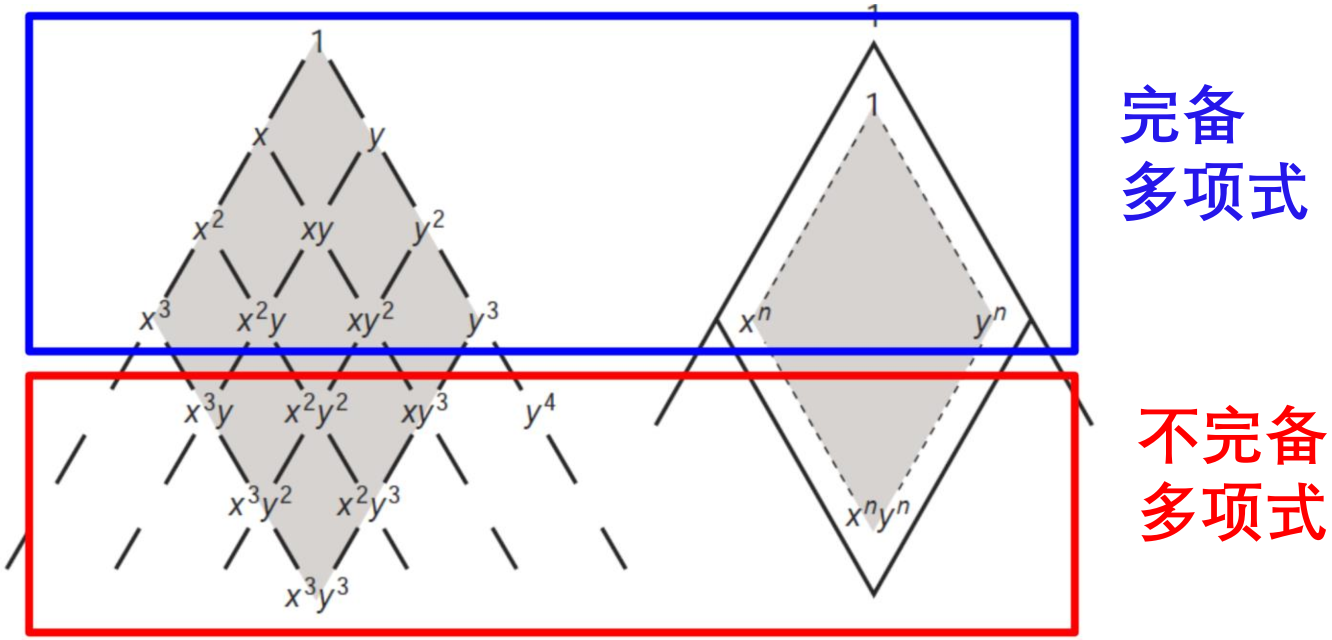
$$N_i=N_{IJ}=l_I^{(n)}(\xi)\,l_J^{(m)}(\eta)$$

N_i 在结点 i 上等于 **1**，而在其余所有结点上等于 **0**。

Lagrange 矩形单元



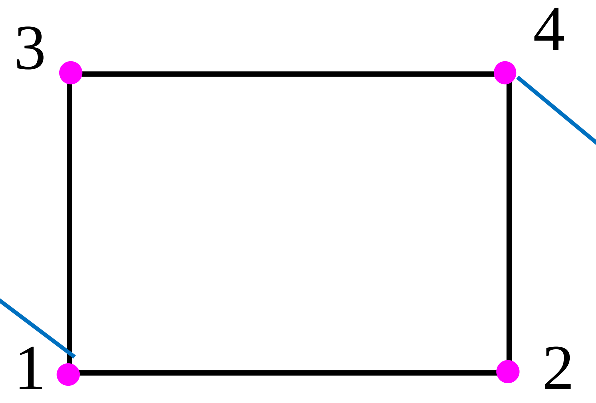
- 内节点增加（通常不提高单元的精度）
- 插值函数方次增加（增加很多高次项，而精度往往由完全多项式的方次决定）



➢ 二维单元 >> Hermite 矩形单元

- 包含导数项
- 构造方式类似于Lagrange 矩形单元
- 自由度过多，例如双一阶Hermite多项式含16个自由度

$$\begin{cases} Q_1 = \phi_1 \\ Q_2 = (\partial\phi/\partial\xi)_1 \\ Q_3 = (\partial\phi/\partial\eta)_1 \\ Q_4 = (\partial^2\phi/\partial\xi\partial\eta)_1 \end{cases}$$

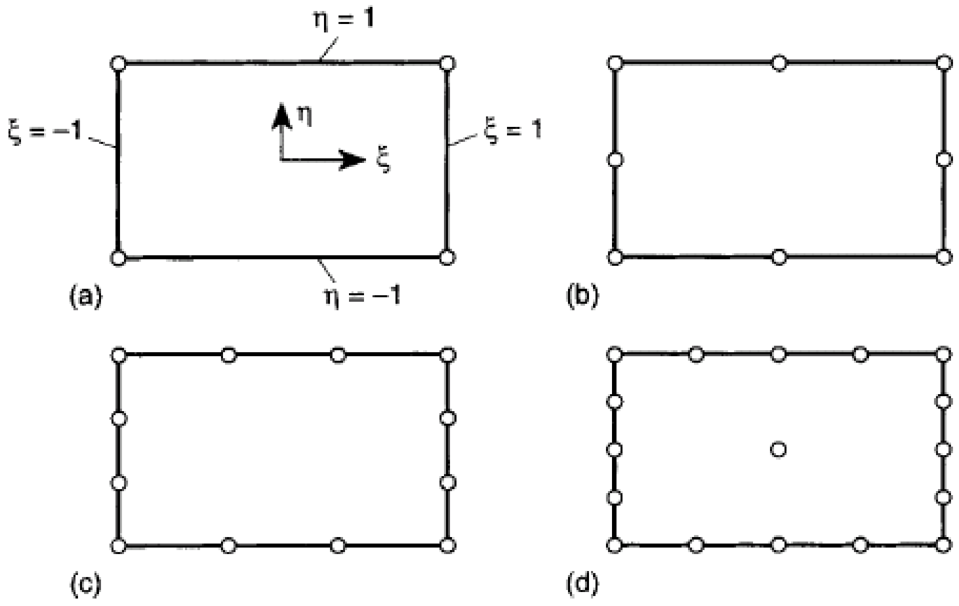


$$\begin{cases} Q_{13} = \phi_4 \\ Q_{14} = (\partial\phi/\partial\xi)_4 \\ Q_{15} = (\partial\phi/\partial\eta)_4 \\ Q_{16} = (\partial^2\phi/\partial\xi\partial\eta)_4 \end{cases}$$

双1阶 Hermite 矩形单元

➢ 二维单元 >> Serendipity四边形单元

移除拉格朗日单元的不完备自由度对应节点，剩余节点尽量在边上 。



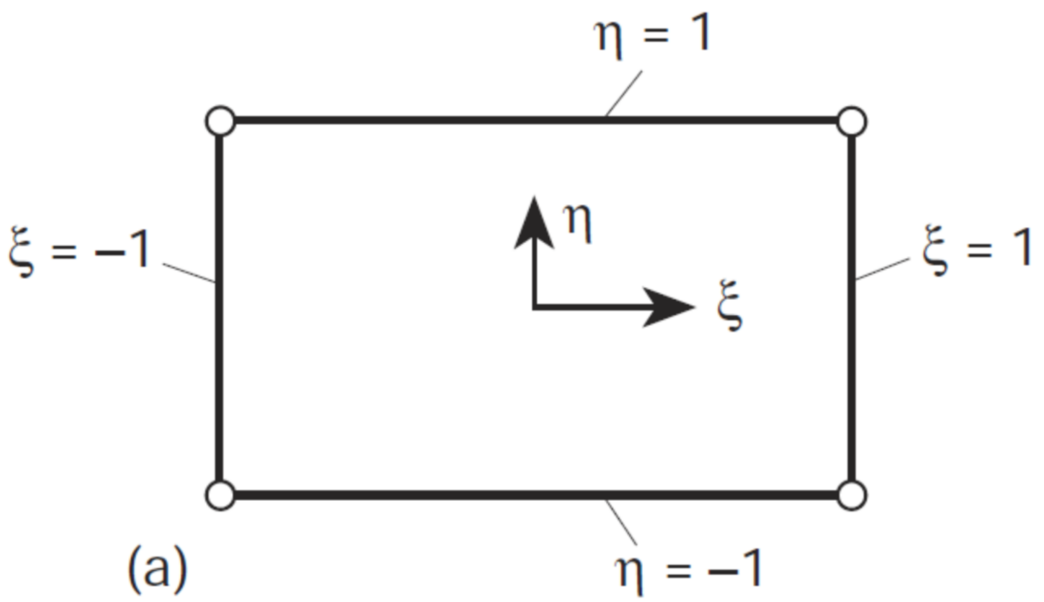
Serendipity 单元族

(a)、(b)、(c)、(d)分别是一次、二次、三次和四次Serendipity单元

其中(d) 中增加一个节点是为了使插值函数中的四次多项式是完全的

四节点四边形(quadrilateral)单元(Q4)

- 双线性单元
- C0连续性，边界上导数不连续
- 最常见的平面问题单元之一

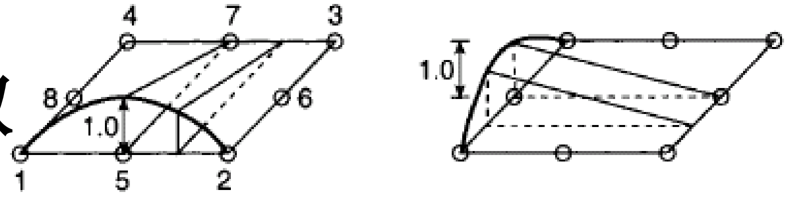


$$\hat{N}_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

$$i = 1,2,3,4$$

- 开始只有四个节点

  对应此节点的插值函数利用双一次 **Lagrange** 多项式构造：



(a) $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$　　(b) $N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$

$$\boxed{\hat{N}_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0) \quad (i=1,2,3,4)}$$

其中 $\boxed{\xi_0 = \xi_i \xi,\ \eta_0 = \eta_i \eta}$

- 增加边内结点

  相应的插值函数表示成　　（或　　）方向二次和　　（或　　）方向一次**Lagrange** 多项式的乘积

  结点5 $\boxed{N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)}$

也可以用划线法构造

- 对于5各节点的单元（增加节点5）

N_5满足$N_{5j} = \delta_{5j} \ (j = 1,2,\cdots,5)$

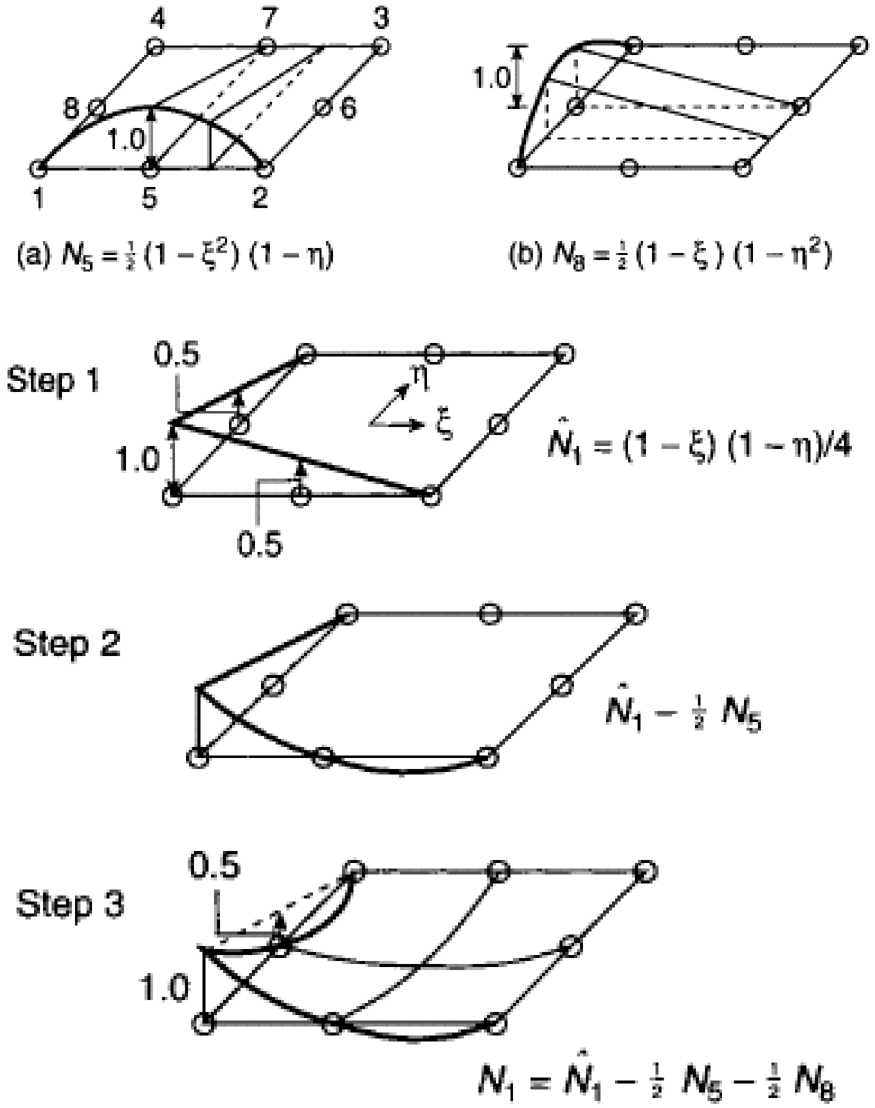
但是$\hat{N}_i(i = 1,2,3,4)$不满足

$\hat{N}_{i5} = \delta_{i5} = 0 \ (i = 1,2)$

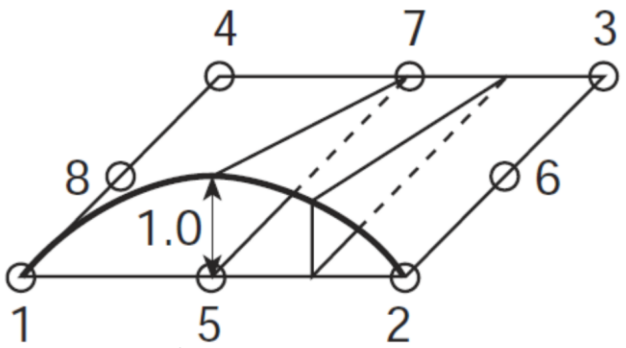
修正$\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{1}{2} N_5$$

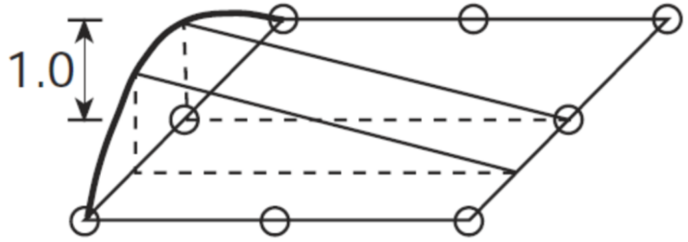
$$N_2 = \hat{N}_2 - \frac{1}{2} N_5$$



递推构造方法——八节点单元

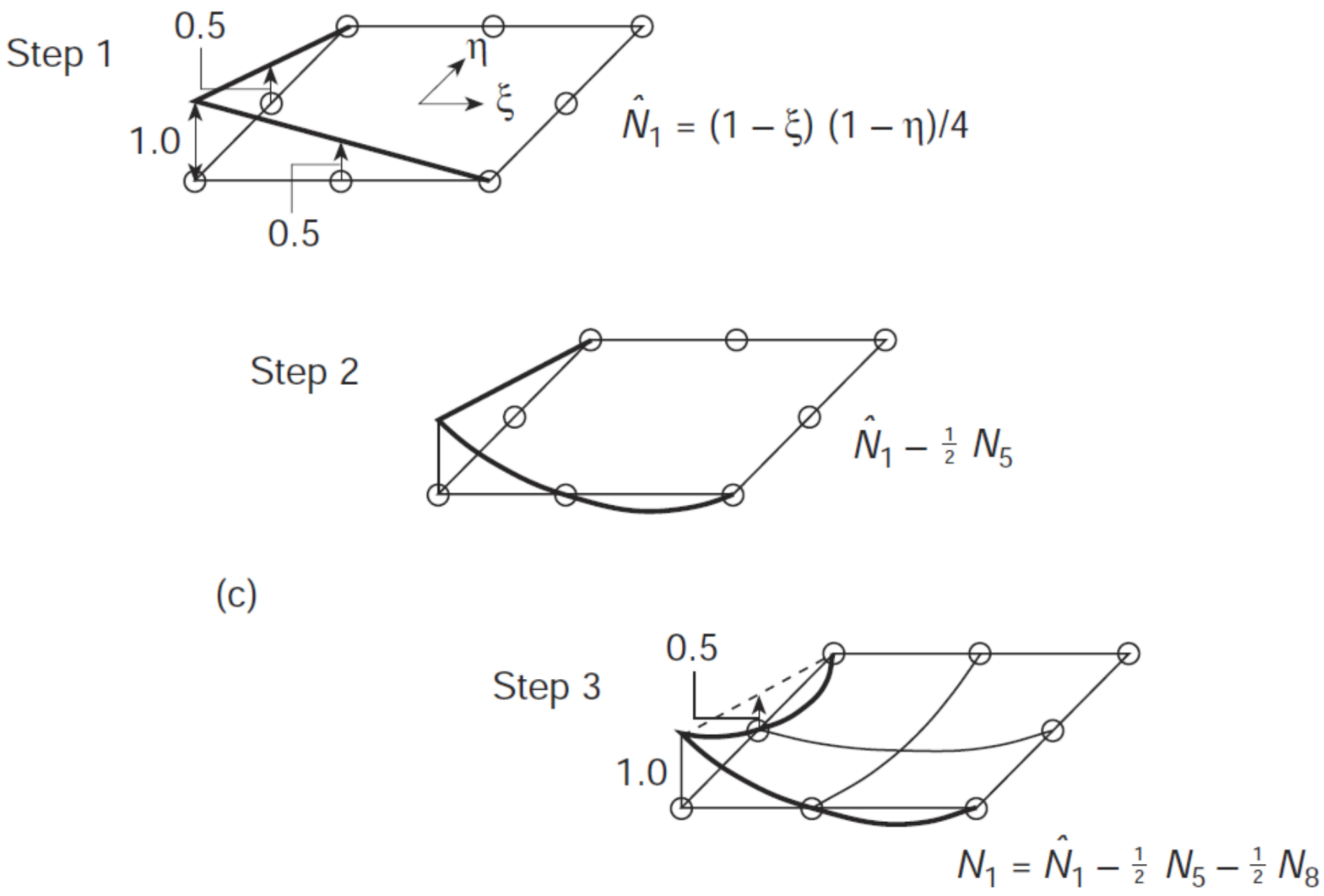


$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$



$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$$

边节点插值函数构造



角节点插值函数修正

- 二次单元（各边中点增加一个节点）

$$N_1=\hat{N}_1-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_8 \qquad N_2=\hat{N}_2-\frac{1}{2}N_5-\frac{1}{2}N_6$$

$$N_3=\hat{N}_3-\frac{1}{2}N_6-\frac{1}{2}N_7 \qquad N_4=\hat{N}_4-\frac{1}{2}N_7-\frac{1}{2}N_8$$

$$N_5=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1-\eta\right) \qquad N_6=\frac{1}{2}\left(1+\xi\right)\left(1-\eta^2\right)$$

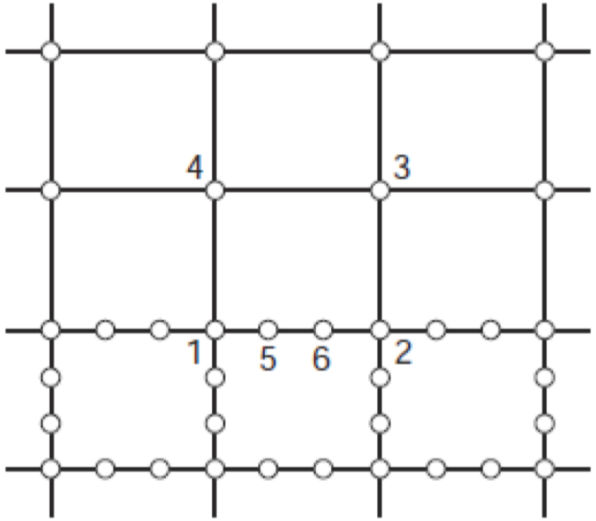
$$N_7=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta\right) \qquad N_8=\frac{1}{2}\left(1-\xi\right)\left(1-\eta^2\right)$$

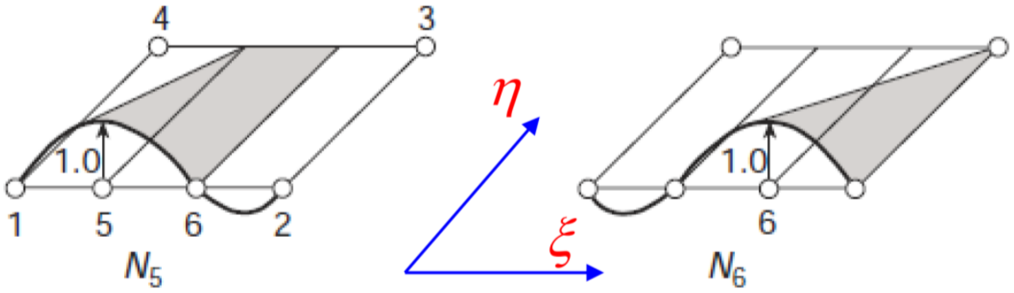
其中$\hat{N}_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)$（$i=1,2,3,4$） $\xi_0=\xi_i\xi$，$\eta_0=\eta_i\eta$

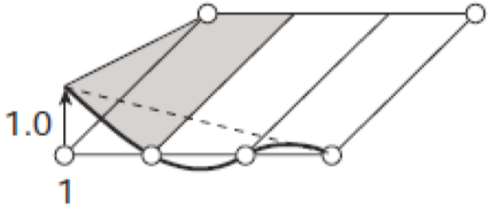
- **如果5、6、7、8节点中任意一个不存在，则对应的插值函数为0**

Serendipity矩形单元

递推构造方法——三次/线性过渡单元







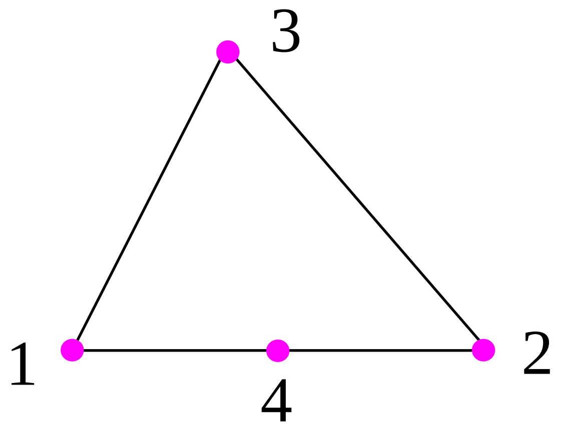
$$N_5 = \frac{1-\xi}{1+\frac{1}{3}}\frac{1+\xi}{1-\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3}-\xi}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\frac{1-\eta}{1+1} = \frac{9}{32}\left(1-\xi^2\right)\left(1-3\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

$$N_1 = \hat{N}_1 - \frac{2}{3}N_5 - \frac{1}{3}N_6$$

$$N_6 = \frac{1-\xi}{1-\frac{1}{3}}\frac{1+\xi}{1+\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3}+\xi}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\frac{1-\eta}{1+1} = \frac{9}{32}\left(1-\xi^2\right)\left(1+3\xi\right)\left(1-\eta\right)$$

◆ Serendipity矩形单元特点

- 完全多项式以外的高次项少很多
- 内部节点数量少
- 可以推广到变节点三角形单元
- 可以用来做过渡单元

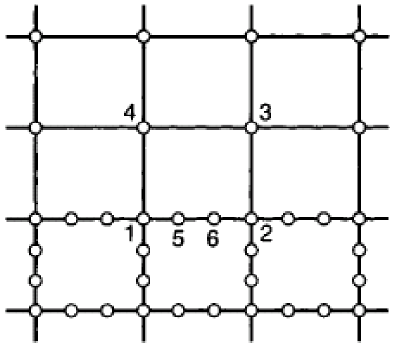


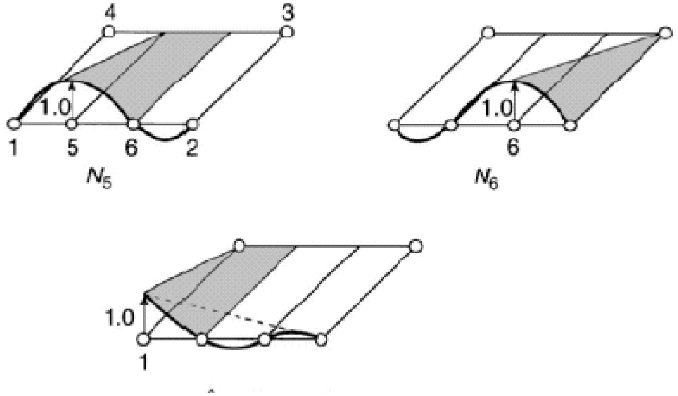
$$N_1 = L_1 - \frac{1}{2} N_4$$

$$N_2 = L_2 - \frac{1}{2} N_4$$

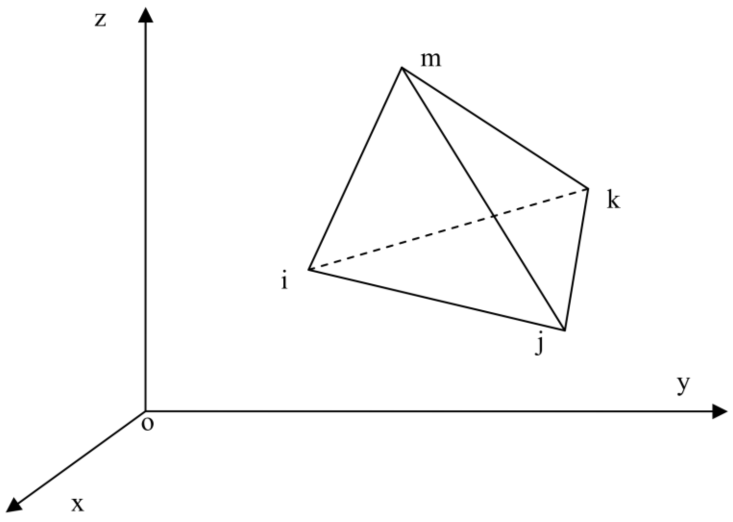
$$N_3 = L_3$$

$$N_4 = 4 L_1 \bullet L_2$$





空间问题的常应变单元(4节点4面体单元，T4)



$$\{u\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$$

i,j,k,m按照右手系排列。在右手坐标系中，当按照 $i \rightarrow j \rightarrow k$ 的方向转动时，右手螺旋应向 **m** 的方向前进。

- 在四结点四面体单元中，共有 12 个自由度，故取线性位移模式。

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z$$

$$v = \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 z$$

$$w = \beta_9 + \beta_{10} x + \beta_{11} y + \beta_{12} z$$

◆ 用位移函数表示各节点位移：

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{A}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}^e = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}$$

解方程可以得到系数β用节点位表示的的表达式，最后将位移模式写成(具体的过程可以参考二维三节点三角形单元的推导)：

$$u = \sum_{i=i}^{m} N_i u_i \,, \qquad v = \sum_{i=i}^{m} N_i v_i \,, \qquad w = \sum_{i=i}^{m} N_i w_i$$

$$N_i = \frac{1}{6V}\left(a_i + b_i x + c_i y + d_i z\right) \qquad \left(i = i, j, k, m\right)$$

$$6V = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

a, b, c, d分别为第1,2,3,4列的代数余子式

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_i & \boldsymbol{N}_j & \boldsymbol{N}_k & \boldsymbol{N}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{u}_m \end{Bmatrix}$$

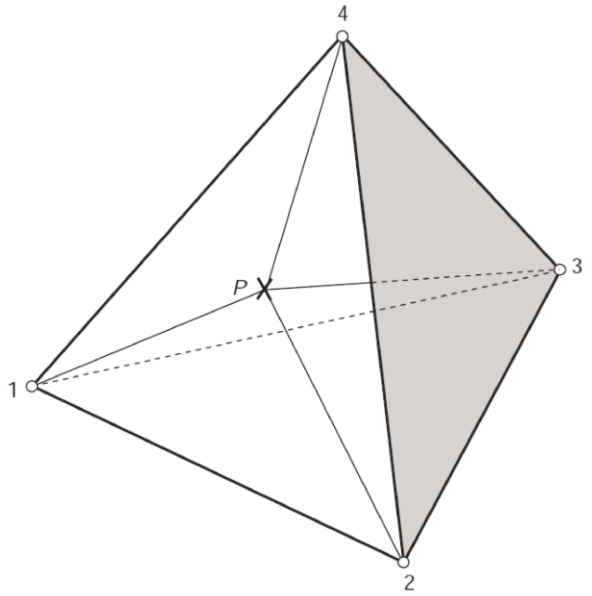
$$\boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{I} N_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$$

➢ 三维单元 >> 四面体单元(体积坐标)

L_i是体积坐标，也是自然坐标，类似于面积坐标。

四面体单元（Tetrahedral elements）



体积坐标

$$L_1 = \frac{\mathrm{vol}(P234)}{\mathrm{vol}(1234)} \qquad L_2 = \frac{\mathrm{vol}(P134)}{\mathrm{vol}(1234)}$$

$$L_3 = \frac{\mathrm{vol}(P124)}{\mathrm{vol}(1234)} \qquad L_4 = \frac{\mathrm{vol}(P123)}{\mathrm{vol}(1234)}$$

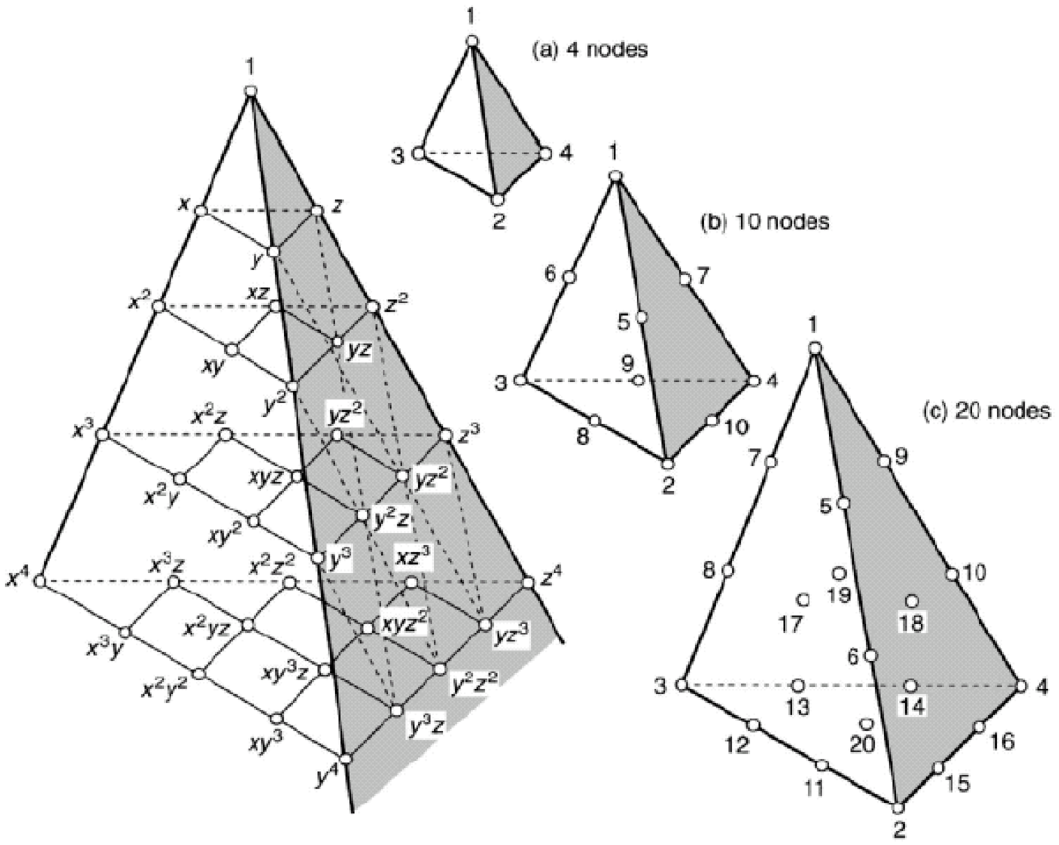
$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

$$\mathrm{vol}(ijkl) = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

➢ 三维单元 >> 四面体单元(体积坐标)

◆ 线性单元(常应变四面体单元)

$$N_i = L_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$



➢ 三维单元 >> 四面体单元

◆ 线性单元(常应变四面体单元)

$$N_i = L_i \quad (i=1,2,3,4)$$

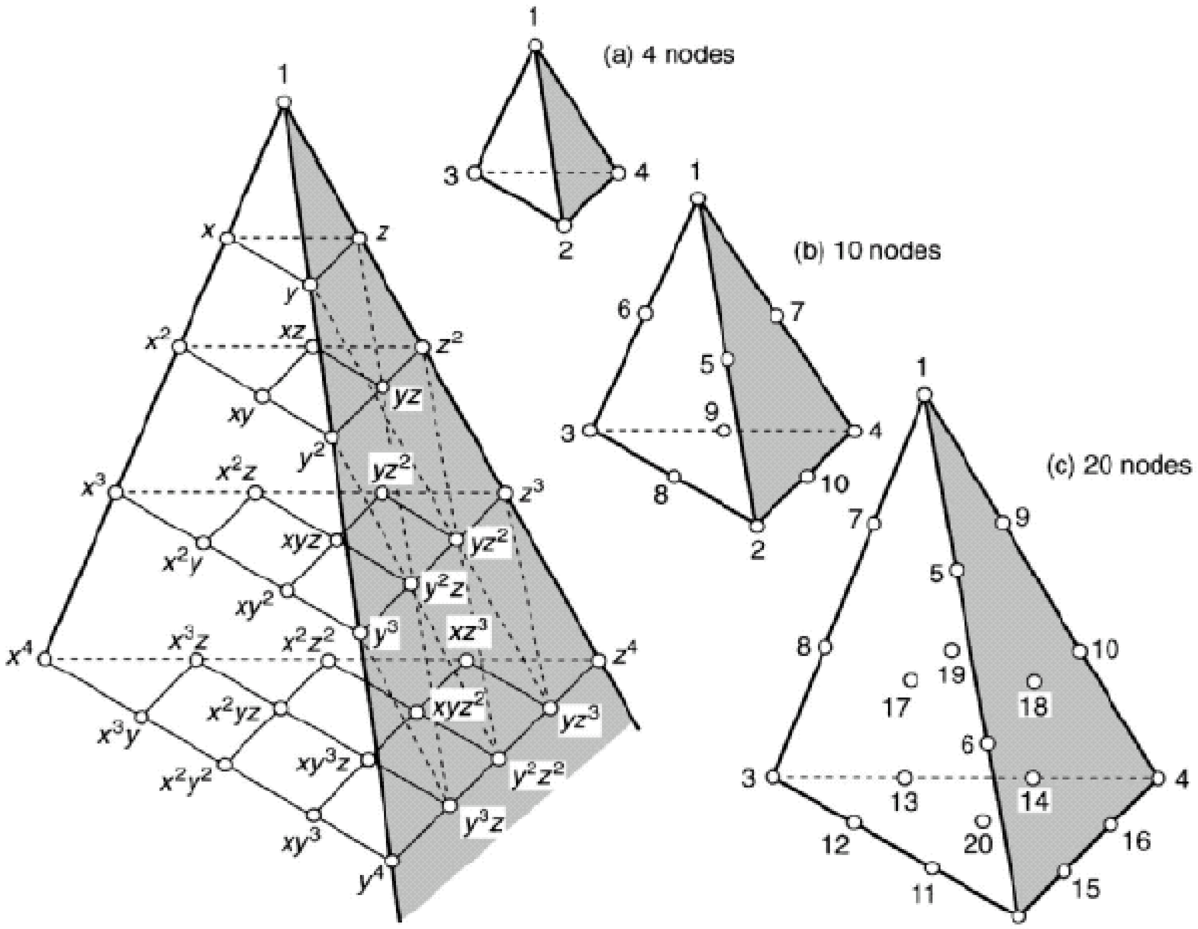
◆ 二次单元

角结点

$$N_i = (2L_i - 1) L_i \quad (i=1,2,3,4)$$

棱内结点

$$N_5 = 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_1L_3$$
$$N_7 = 4L_1L_4, \quad N_8 = 4L_2L_3$$
$$N_9 = 4L_3L_4, \quad N_{10} = 4L_2L_4$$



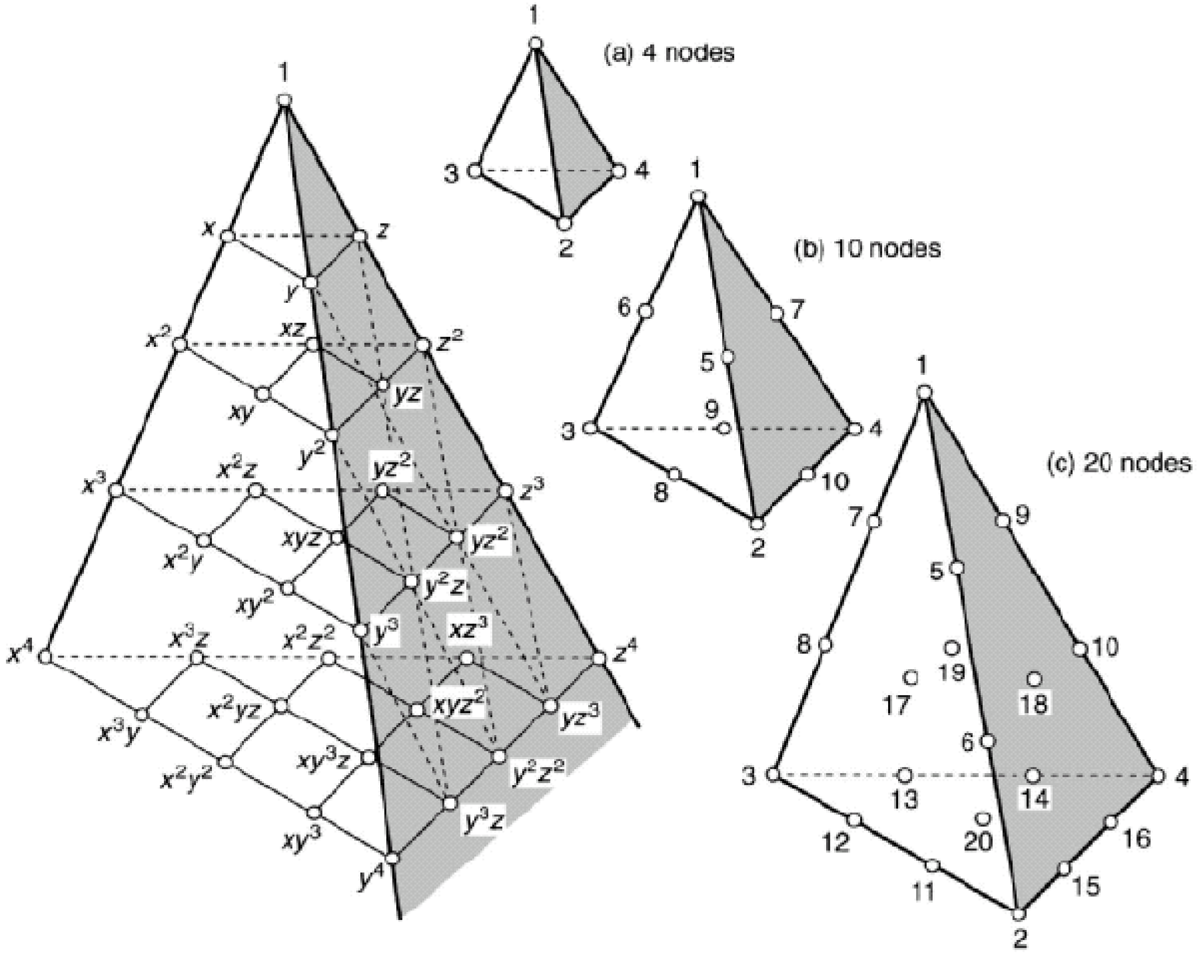
◆ 三次单元-20节点

构造方式类似于二维（划线法→画面法）

$$N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2)L_i, \ i = 1,2,3,4$$ 角结点

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1 L_2 (3L_1 - 1), \quad \text{etc.}$$ 边内结点

$$N_{17} = 27 L_1 L_2 L_3, \quad \text{etc.}$$ 面内结点



➢ 三维单元 >> 三维Lagrange 单元

- 一维Lagrange 单元可以直接推广到三维
- 插值函数表示为三个坐标方向Lagrange多项式的乘积

$$N_i = N_{IJK} = l_I^{(n)} l_J^{(m)} l_K^{(p)}$$

其中 ***m, n, p*** 分别表示每一坐标方向的行数减1，即Lagrange多项式的次数。**I, J, K** 表示结点在每一坐标方向的行列号。

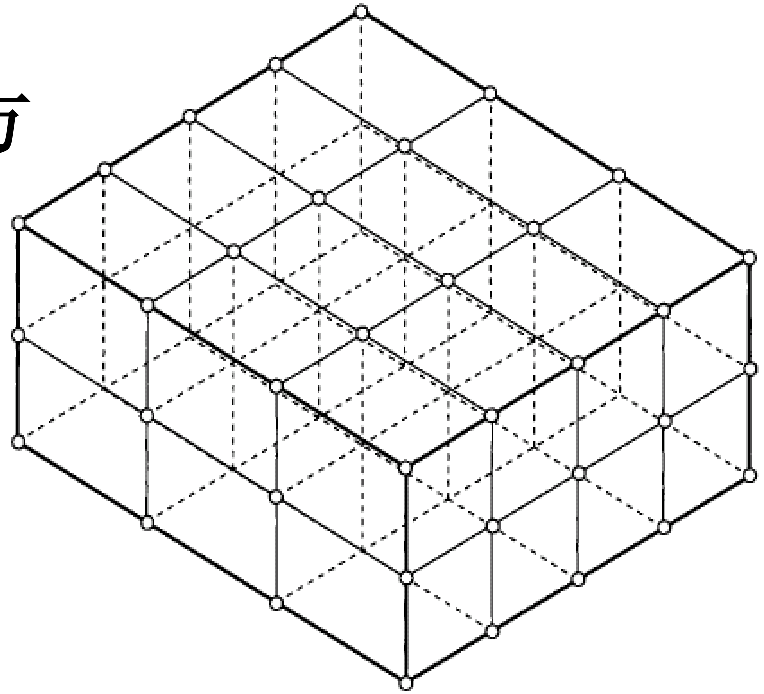
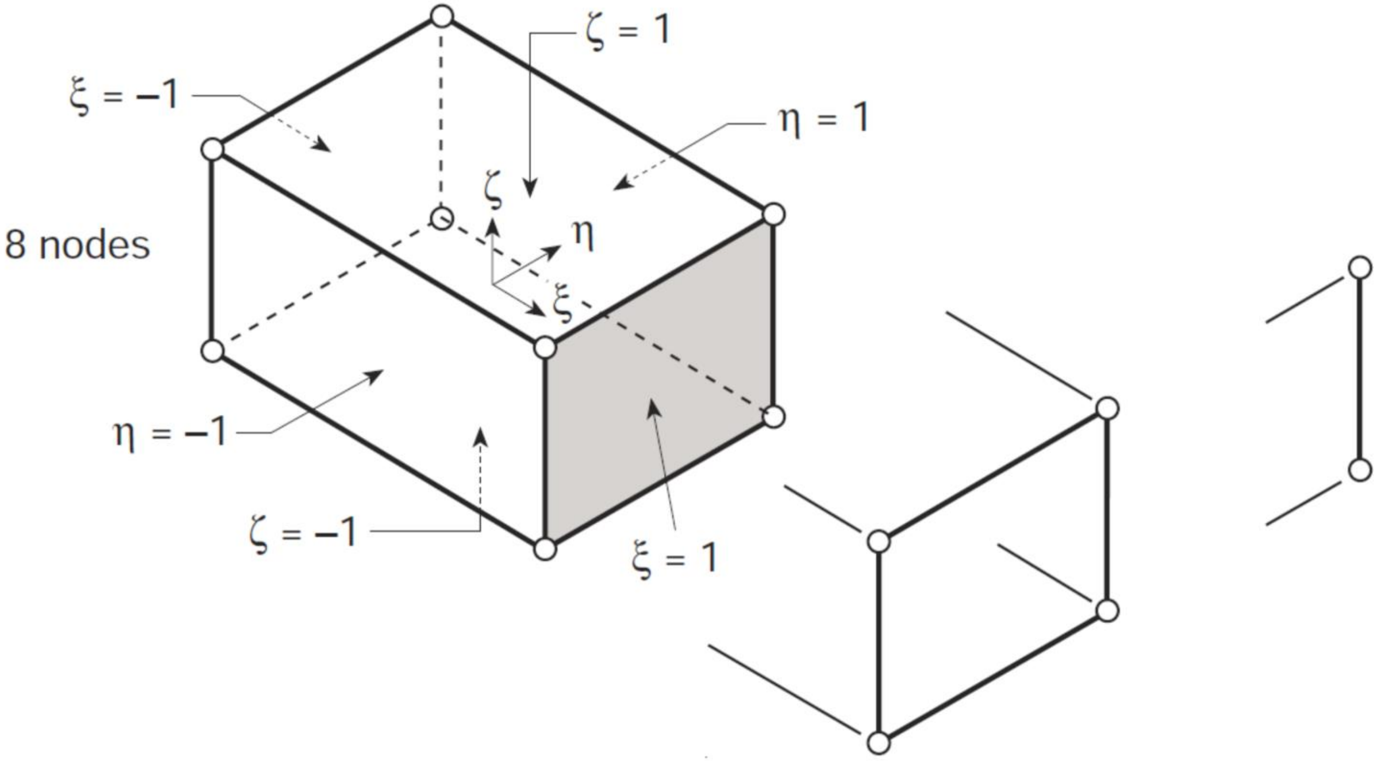


Fig. 8.19 Right prism of Lagrange family.

➢ 三维单元 >> 三维Serendipity 单元

◆ 线性单元（8节点）



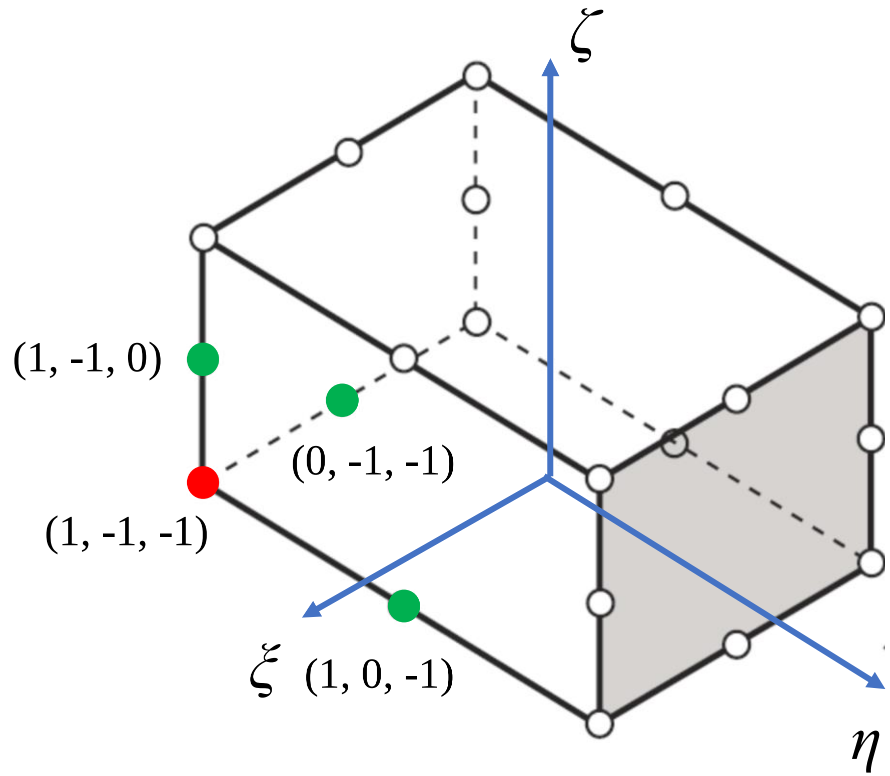
$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

$$\xi_0 = \xi_i \xi$$

$$\eta_0 = \eta_i \eta$$

$$\zeta_0 = \zeta_i \xi$$

◆ 二次单元（20节点）



角结点

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)\times$$
$$(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2)$$

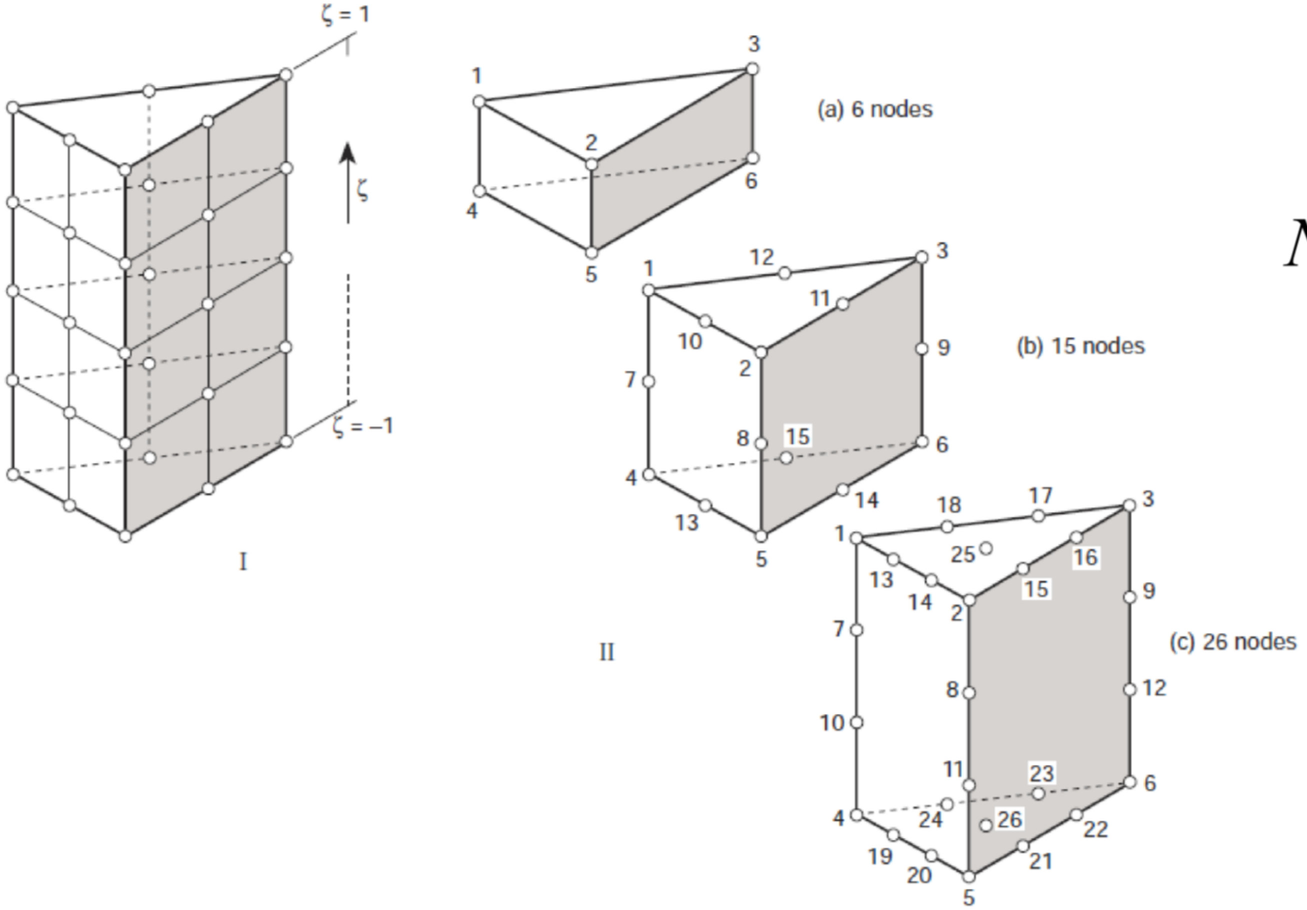
角点划面:三个不包含该点的六面体面和周围三个边中点组成的斜面(对于图中红点来说就是三个绿点组成的斜面)

边内结点

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

$$(\xi_i = 0, \eta_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1)$$

五面体单元（Wedge elements）



三角形单元×矩形单元

15结点单元为例：

角结点

$$N_1 = \tfrac{1}{2} L_1 (2L_1 - 1)(1+\zeta) - \tfrac{1}{2} L_1 (1-\zeta^2)$$

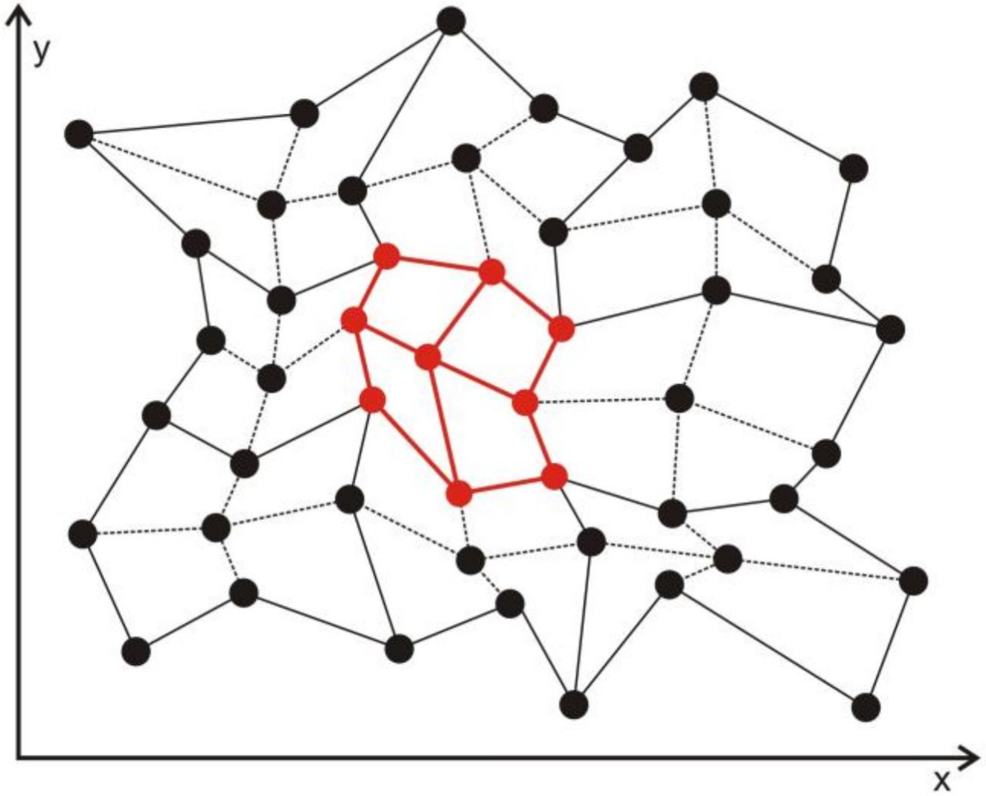
三角形边内结点

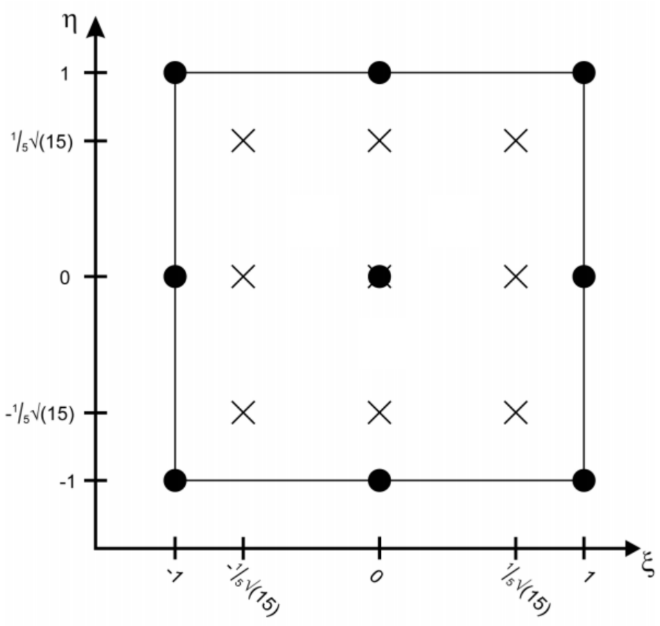
$$N_{10} = 2L_1 L_2 (1+\zeta)$$

四边形边内结点

$$N_7 = L_1 (1-\zeta^2)$$

等参元与数值积分





局部坐标系下规则单元

整体坐标系下网格划分

- 三角形(四面体)的自然坐标;
- 四边形(六面体)中的局部直角坐标$\xi\eta\zeta$

等参元概念

- 起因：几何形状规则的单元离散几何形状复杂的求解域比较困难；不规则单元上的插值难以构造，需要借助局部坐标。
- 目标：将规则形状的单元转化为边界为曲线或曲面的单元
- 方法：等参元
- 思路：等参变换，即单元几何形状的变换和单元内的场函数采用相同数目的结点参数及相同的插值函数的变换

局部(自然)坐标单元 → 整体坐标单元

几何形状规则 → 几何形状扭曲

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = f\left(\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix}\right) \text{or } f\left(\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}\right)$$

局部坐标
和整体坐
标的映射

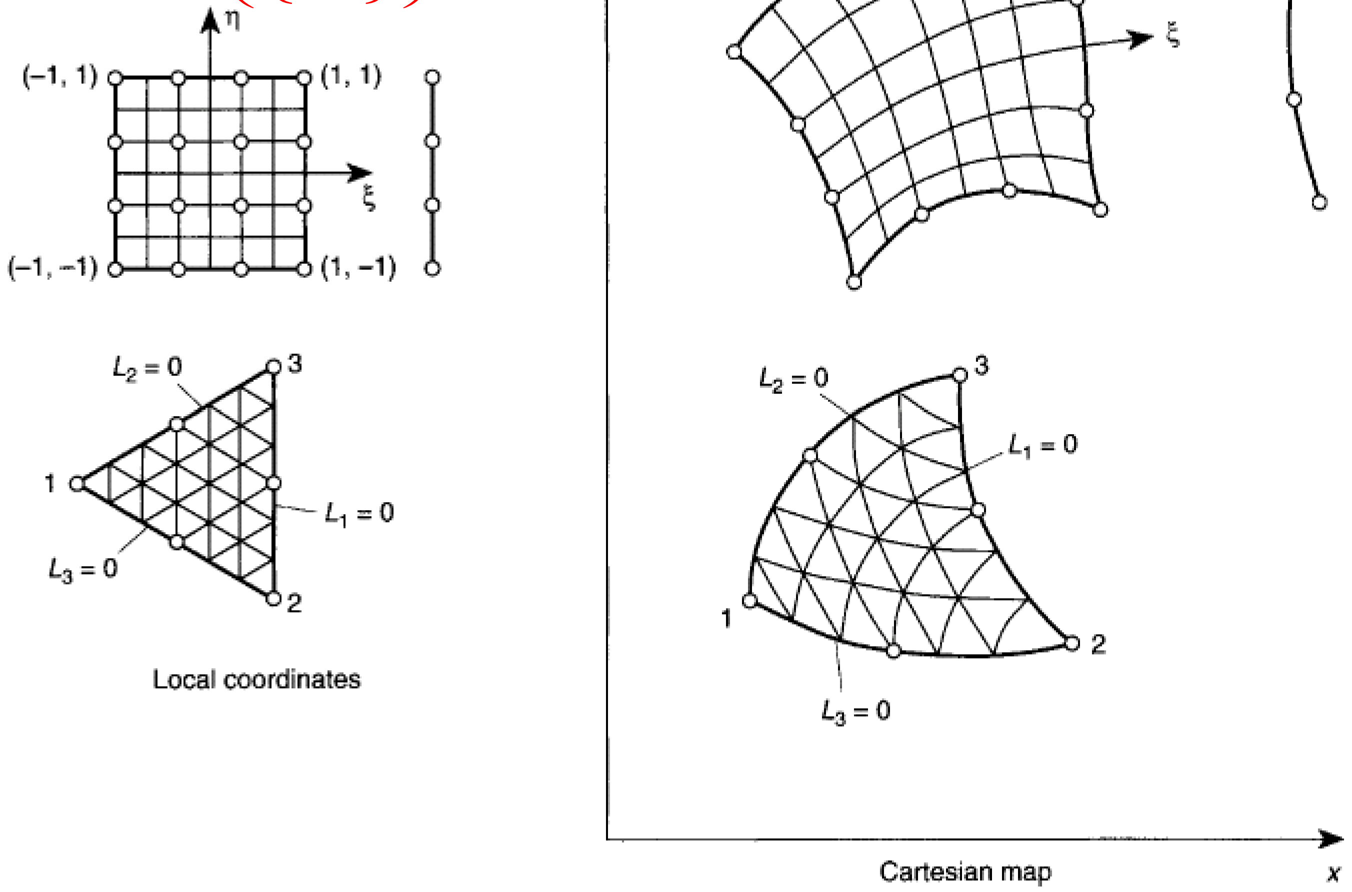


Fig. 9.1 Two-dimensional 'mapping' of some elements.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f\left(\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}\right) \text{or } f\left(\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}\right)$$

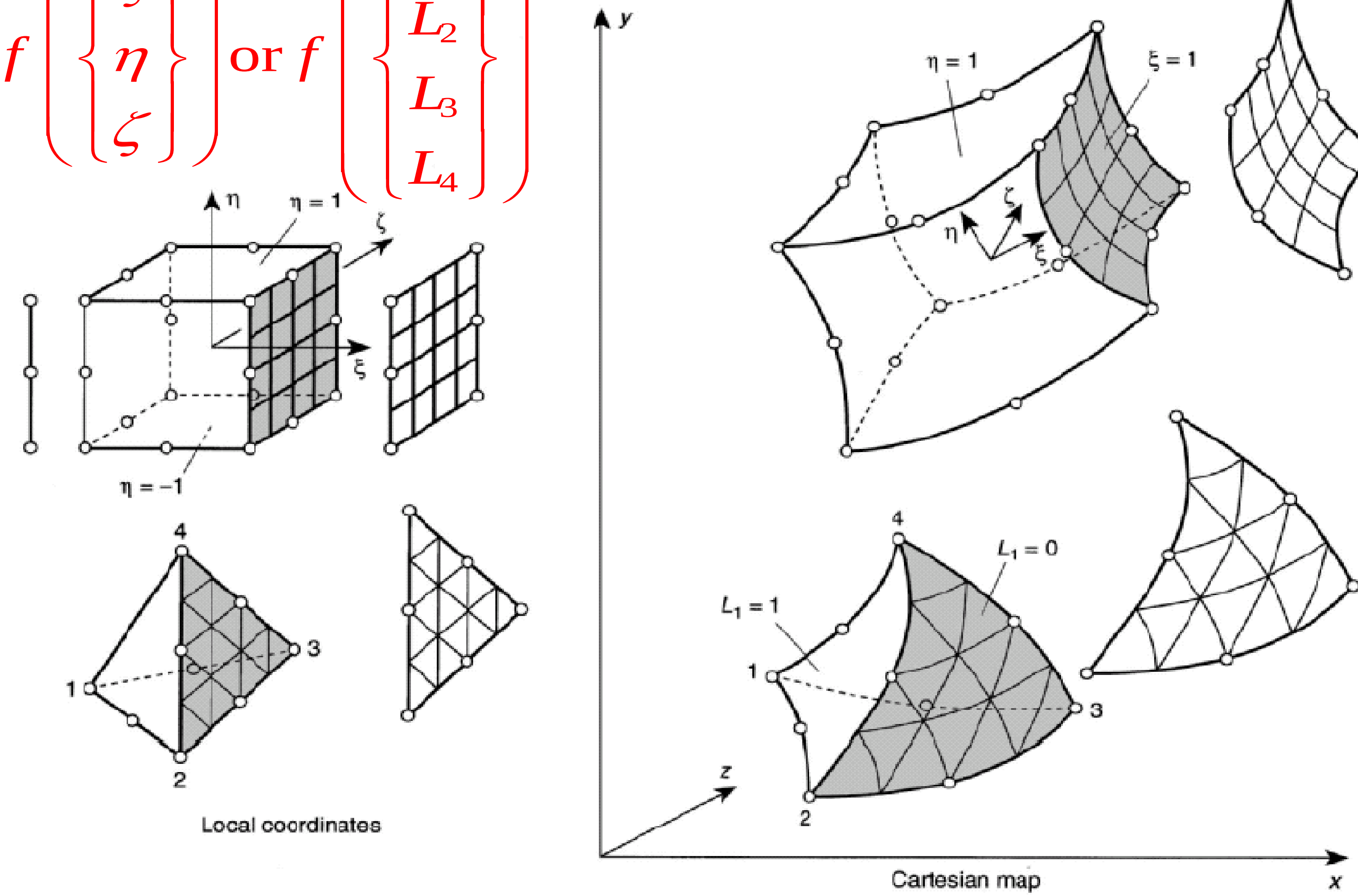


Fig. 9.2 Three-dimensional 'mapping' of some elements.

◆ 坐标变换表示成插值函数的形式

$$u=\sum_{i=1}^{n}N_iu_i \quad \Rightarrow \quad x=\sum_{i=1}^{m}N_i'x_i,\ y=\sum_{i=1}^{m}N_i'y_i,\ z=\sum_{i=1}^{m}N_i'z_i$$

$$x(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)x_i$$

$$y(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)y_i$$

$$z(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)=\sum_{i=1}^{m}N_i'(\xi,\eta,\zeta)z_i$$

m用以进行坐标变换的单元结点数

x_i,y_i,z_i 这些结点在总体坐标的坐标值

N'_i形状函数，也是局部坐标表示的插值函数

等参变换　坐标变换和函数插值采用相同的结点，并且采用相同的插值函数，即$m=n, N'_i=N_i$

超参变换　坐标变换结点数多于函数插值的结点数

亚参变换　坐标变换结点数少于函数插值的结点数

➢ 三维等参元变换

$$\boxed{u=\sum_{i=1}^{n}N_i u_i}$$

$$\boxed{x=\sum_{i=1}^{m}N_i' x_i\,,\ y=\sum_{i=1}^{m}N_i' y_i\,,\ z=\sum_{i=1}^{m}N_i' z_i}$$

- 考虑到方便性，希望在局部（自然）坐标内按规格化进行数值积分，因此还需要导数之间的变换

$$\boxed{\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}}$$

偏导数之间的变换

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$$x = \sum_{i=1}^{m} N_i' x_i \, , \; y = \sum_{i=1}^{m} N_i' y_i \, , \; z = \sum_{i=1}^{m} N_i' z_i$$

- ***J***称为***Jacobi*** 矩阵，可表示为：

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} z_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}$$

◆ *J*称为*Jacobi*矩阵，可表示为：

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i & \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_m'}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2'}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_m'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2'}{\partial \zeta} & \cdots & \frac{\partial N_m'}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & y_m & z_m \end{bmatrix}$$

计算刚度矩阵需要的位移-应变矩阵B由形函数对整体坐标的偏导数构成。

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

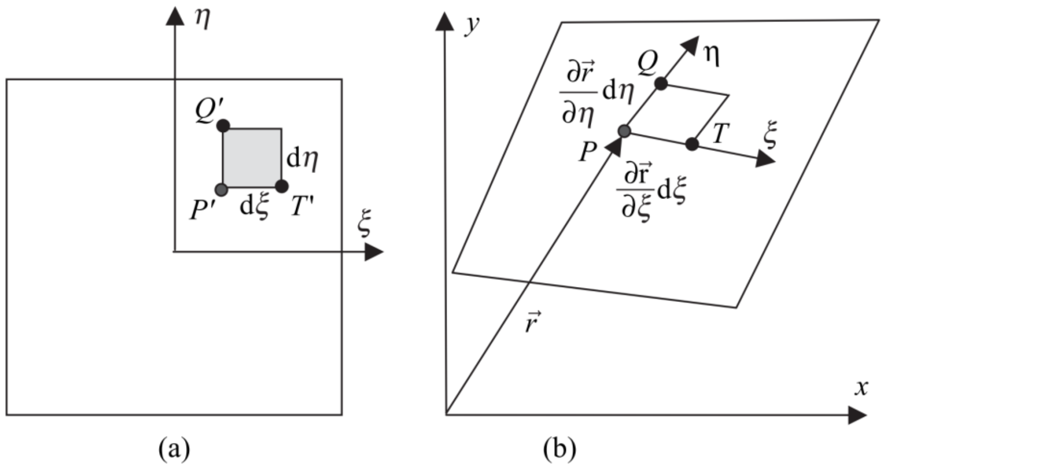
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{J}^{-1}$是$\boldsymbol{J}$ 的逆矩阵

◆ 体积微元的变换

假设单元中任意一点P，它的位置用向量$\boldsymbol{r}$表示:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$



Mapping of the infinitesimal areas from (a) the parent domain to (b) the physical domain.

i, j, k表示沿着三个整体坐标轴方向的单位向量。

考虑沿着三个局部坐标轴的坐标变化分别为dξ, dη和dζ，每个坐标单独变化引起的$\boldsymbol{r}$向量变化，也就是向量$\boldsymbol{r}$的微分分别为:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\xi} &= d\boldsymbol{r}_{\xi} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \boldsymbol{k} \\
d\boldsymbol{\eta} &= d\boldsymbol{r}_{\eta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \boldsymbol{k} \\
d\boldsymbol{\zeta} &= d\boldsymbol{r}_{\zeta} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \zeta} d\zeta = \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

$$d\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{\zeta}=\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{k}$$

$d\xi$,$d\eta$,$d\zeta$在笛卡儿坐标系内所形成的体积微元是:

$$dV=d\boldsymbol{\xi}\bullet\left(d\boldsymbol{\eta}\times d\boldsymbol{\zeta}\right)$$

$$dV=d\boldsymbol{\xi}\bullet\left(d\boldsymbol{\eta}\times d\boldsymbol{\zeta}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{vmatrix}d\xi d\eta d\zeta=\left|\boldsymbol{J}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$在是笛卡儿坐标 x,y,z 方向的单位向量

$$\int_{V_e}G\,dV=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}G^{*}\left(\xi,\eta,\zeta\right)\left|J\right|d\xi d\eta d\zeta$$

◆ 面积微元的变换

在ξ=常数(c)的面上:

$$d\boldsymbol{\xi}=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{\eta}=\frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta\boldsymbol{k}$$

$$d\boldsymbol{\zeta}=\frac{\partial x}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial \zeta}d\zeta\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}dA&=\left|d\boldsymbol{\eta}\times d\boldsymbol{\zeta}\right|_{\xi=c}\\&=\left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}-\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta}-\frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}-\frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{1/2}d\eta d\zeta=Ad\eta d\zeta\end{aligned}$$

其它面上的 dA 可以通过轮换 ξ, η, ζ得到

$$\int_{S_e}g\,dS=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}g^*(c,\eta,\zeta)\left|A\right|d\eta d\zeta$$

(在$\xi=\pm1$的面上, $c=\pm1$)

◆ 有限元中的单元体积内和面积内的积分变换到自然坐标系的规则化域内，分别表示成

$$\int_{V_e} G dV = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} G^*(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

$$\int_{S_e} g dS = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} g^*(c,\eta,\zeta) d\eta d\zeta$$

（在$\xi = \pm 1$的面上，$c = \pm 1$）

其中

$$G^*(\xi,\eta,\zeta) = G\left(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\right)|\boldsymbol{J}|$$

$$g^*(c,\eta,\zeta) = g\left(x(c,\eta,\zeta), y(c,\eta,\zeta), z(c,\eta,\zeta)\right)A$$

➢ 二维参数变换

$$u=\sum_{i=1}^{n}N_i u_i$$

$$x=\sum_{i=1}^{m}N_i' x_i\,,\ y=\sum_{i=1}^{m}N_i' y_i$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

偏导数之间的变换

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$x = \sum_{i=1}^{m} N_i' x_i , \quad y = \sum_{i=1}^{m} N_i' y_i$$

- ***J*称为*Jacobi* 矩阵，可表示为：**

$$\boldsymbol{J} \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \cdots & \dfrac{\partial N_m'}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \eta} & \cdots & \dfrac{\partial N_m'}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix}$$

◆ 二个坐标之间的偏导数关系

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

◆ **$d\xi$ 和 $d\eta$** 在笛卡儿坐标系内所形成的面积微元

$$dA = |\boldsymbol{J}|\, d\xi d\eta$$

$$\int_{\Omega_e} G dA = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} G^*(\xi,\eta)|J|\, d\xi d\eta$$

◆ 在ξ=常数 (c) 的曲线上，在笛卡儿坐标内的线段微元的长度

$$ds = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]}\, d\eta = s\, d\eta$$

➢ 等参变换的条件

◆ 等参变换为一种坐标变换，其一一对应的条件是 *Jacobi* 行列式 $|J|$ 不得为0。

体积微元

$$dV=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta=|\boldsymbol{J}|d\xi d\eta d\zeta$$

面积微元

$$dA=|\boldsymbol{J}|d\xi d\eta$$

若 $|\boldsymbol{J}|=0$

$\boldsymbol{J}$不可逆，不存在$\boldsymbol{J}^{-1}$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{matrix}\right\} \cancel{=} \boldsymbol{J}^{-1}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{matrix}\right\}$$

微元上，局部（自然）坐标的点与全局（笛卡儿）坐标不是一一对应

对于二维问题，在笛卡儿坐标中

$$dA = \left| d\boldsymbol{\xi} \times d\boldsymbol{\eta} \right| = \left| d\boldsymbol{\xi} \right| \left| d\boldsymbol{\eta} \right| \sin\left(d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta} \right)$$

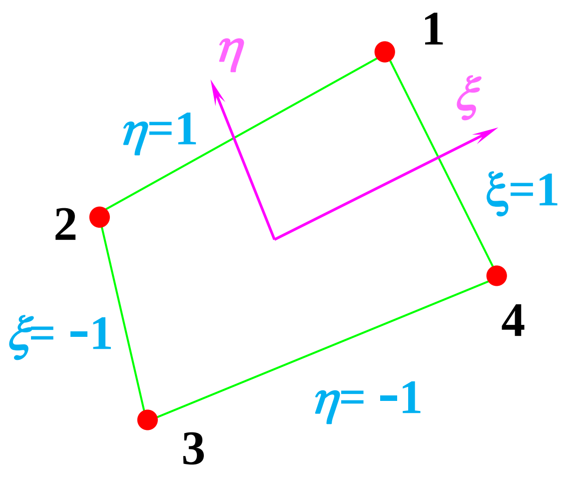
$$\Rightarrow \quad \left| \boldsymbol{J} \right| = \frac{\left| d\boldsymbol{\xi} \right| \left| d\boldsymbol{\eta} \right| \sin\left(d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta} \right)}{d\xi d\eta}$$

$$\left| d\boldsymbol{\xi} \right| = 0$$

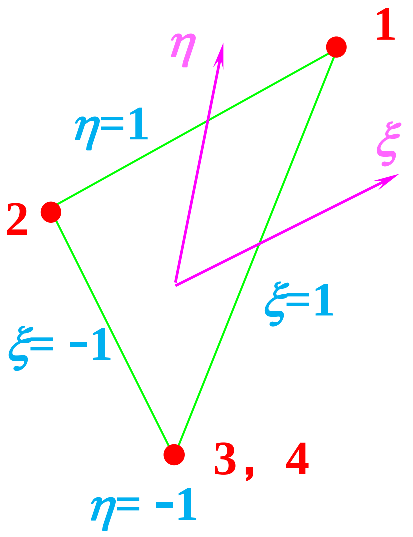
$$\left| d\boldsymbol{\eta} \right| = 0$$

$$\sin\left(d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta} \right) = 0$$

$$\left| \boldsymbol{J} \right| = 0$$

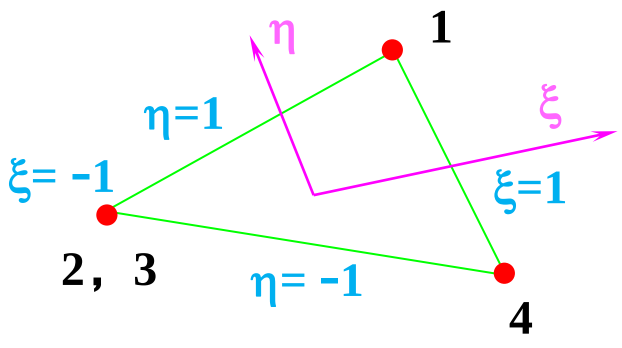


正常情况



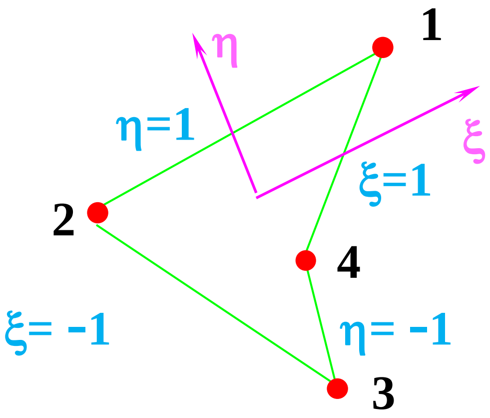
结点3，4退化为一个结点

该点 $\left|d\xi\right| = 0$



结点2，3退化为一个结点

该点 $\left|d\boldsymbol{\eta}\right| = 0$

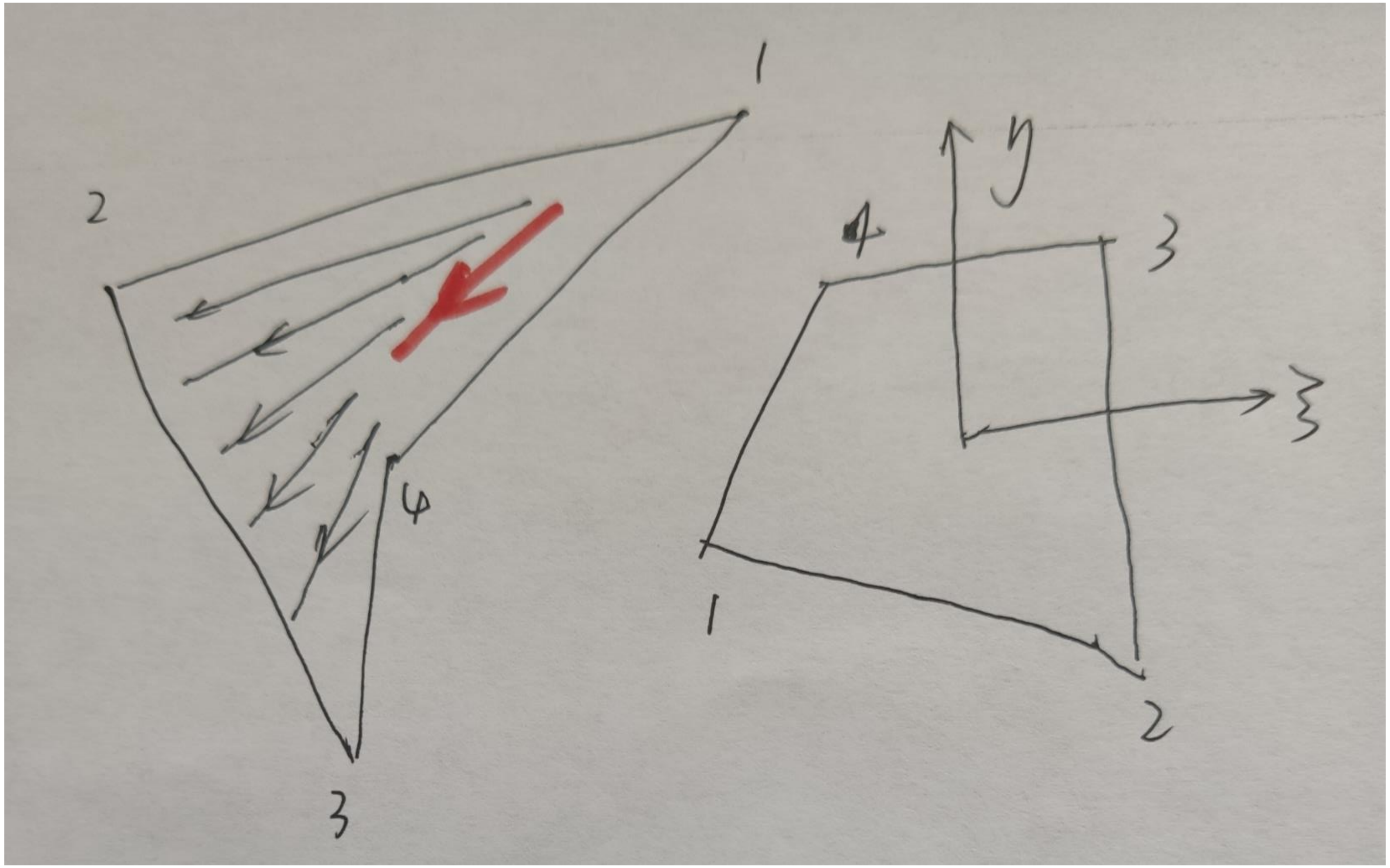


单元过分歪曲出现凹角

单元内存在 $\sin\left(d\xi, d\boldsymbol{\eta}\right) = 0$

$\sin\left(d\xi, d\boldsymbol{\eta}\right)$ 连续变化

单元内存在 $\sin\left(d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta}\right) = 0$

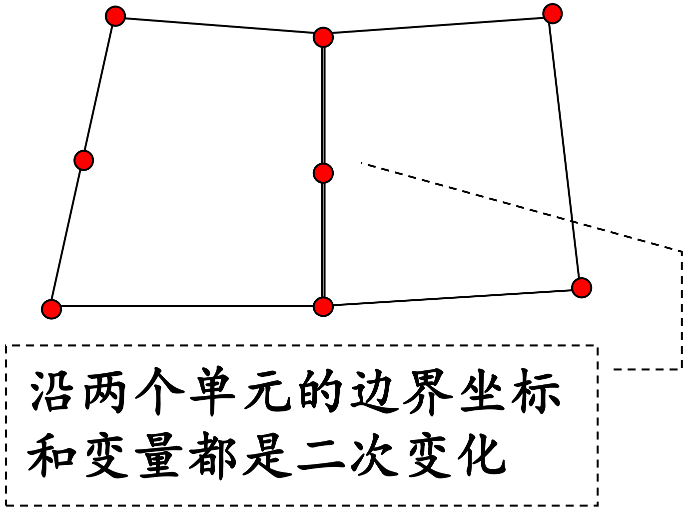


左边图中黑色线表示ξ等值线，红色表示η等值线。

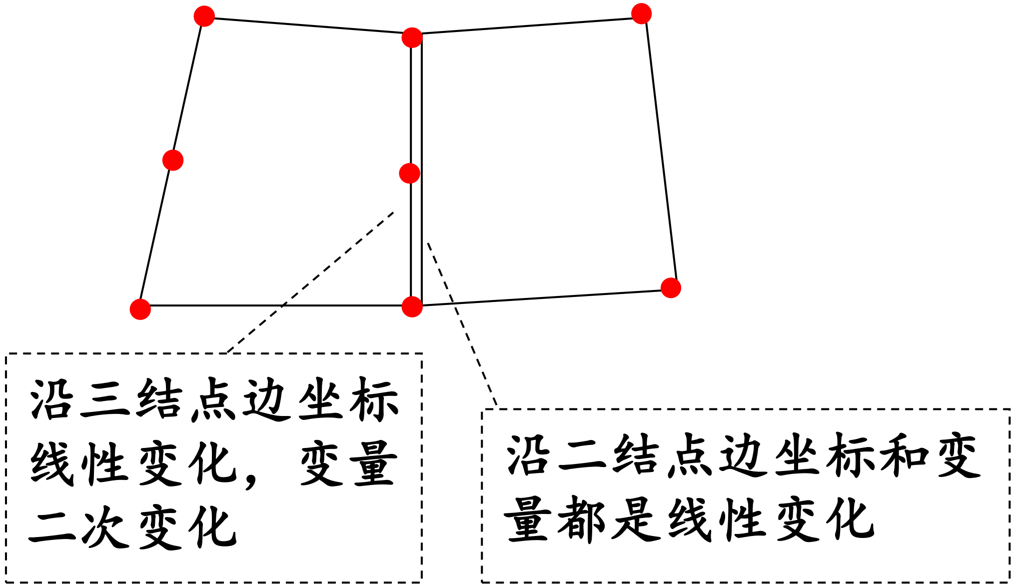
➢ 等参元的收敛性

◆ 协调性

相邻单元在公共边（或面）应有完全相同的结点，同时每一单元沿这些边（或面）的坐标和未知函数应采用相同的插值函数



变量协调



变量不协调

◆ 完备性

对于C_0型单元（其一次导数为常数），要求插值函数中包含一次完全多项式，且无论是局部坐标还是笛卡尔坐标都必须满足。

等参元	满足
超参元	通常不满足
亚参元	满足

C_i型单元:直到i阶偏导数全域连续(单元边界上连续)

等参变换　坐标变换和函数插值采用相同的结点，并且采用相同的插值函数，即$m=n, N'_i=N_i$

超参变换　坐标变换结点数多于函数插值的结点数

亚参变换　坐标变换结点数少于函数插值的结点数

➢ 等参元求解问题的一般格式

- 等参元求解问题的一般格式同前一章的求解格式基本一致，区别在于：等参元的插值函数利用自然坐标给出，一切计算都在规则的母单元内进行。
- 母单元为 ξ，η，ζ 坐标系中的立方体单元系列：

$$
\begin{aligned}
-1 &\le \xi \le 1 \\
-1 &\le \eta \le 1 \\
-1 &\le \zeta \le 1
\end{aligned}
$$

$$
|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\
\frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
A = \Bigg[& \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \Bigg]^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dV &= |\boldsymbol{J}|\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
dA &= A\, d\eta\, d\zeta
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{K}^e=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{B}^{eT}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^e d\Omega=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{J}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\boldsymbol{P}_b^e=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^{eT}\boldsymbol{b}d\Omega=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{b}\left|\boldsymbol{J}\right|d\xi d\eta d\zeta$$

$$\boldsymbol{P}_s^e=\int_{\Omega_e}\boldsymbol{N}^{eT}\boldsymbol{t}d\Omega=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{t}Ad\eta d\zeta$$

（$\boldsymbol{t}$ 作用在 $\xi=1$ 的面）

- 二维问题的相应公式可由以上公式退化得到
- 以上的积分公式一般采用高斯数值积分

- 母单元为四面体的单元系列

使用体积坐标进行计算，只有三个为独立变量

$$L_4=1-L_1-L_2-L_3$$

$$\boldsymbol{K}^e=\int_0^1\int_0^{1-L_3}\int_0^{1-L_2-L_3}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\left|\boldsymbol{J}\right|dL_1dL_2dL_3$$

$$\boldsymbol{P}_s^e=\int_0^1\int_0^{1-L_3}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{t}AdL_2dL_3$$

（T 作用在 $L_1=1$ 的面）

$$\boldsymbol{P}_b^e=\int_0^1\int_0^{1-L_3}\int_0^{1-L_2-L_3}\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{b}\left|\boldsymbol{J}\right|dL_1dL_2dL_3$$

- 二维问题的相应公式可由以上公式退化得到
- 以上的积分公式一般采用高斯积分或**hammer**积分

- 微积分公式：

$$I=\int_a^b F(x)dx=\bar{F}(a)-\bar{F}(b)$$ （$\bar{F}$为F的原函数）

①被积函数没有表达式；
②原函数存在但不能用初等函数表示；
③原函数可以用初等函数表示，但太过复杂。

- 解决的办法就是采用数值积分。
- 数值积分：求定积分的近似值的数值方法，即用被积函数的有限个抽样值的加权平均近似值代替定积分的值。

➢ 一维数值积分

$$\boxed{I = \int_a^b F(\xi)d\xi}$$

- 数值积分基本思路：

  构造一个多项式$\varphi(\xi)$

  使得$\varphi(\xi_i) = F(\xi_i)$, $\xi_i(i = 1,2,\cdots,n)$

  用$\int_a^b \varphi(\xi)d\xi$近似$\int_a^b F(\xi)d\xi$　　ξ_i称为积分点

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i)$$　　H_i称为积分权重

- 不同的积分方法，积分点和权的选择不一样，精度也不一样

➢ 一维数值积分 >> 高斯积分

- 也称高斯-勒让德(Gauss-Legendre)积分
- 精度较高n个积分点可以达到2n-1阶精度
- 积分点不是等间距分布

$$\int_a^b F(\xi)d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i)$$

TABLE 5.6 *Sampling points and weights in Gauss-Legendre numerical integration (interval −1 to +1)*

n	ξ_i			H_i		
1	0.	(15 zeros)		2.	(15 zeros)	
2	±0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
3	±0.77459	66692	41483	0.55555	55555	55556
	0.00000	00000	00000	0.88888	88888	88889
4	±0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
	±0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
5	±0.90617	98459	38664	0.23692	68850	56189
	±0.53846	93101	05683	0.47862	86704	99366
	0.00000	00000	00000	0.56888	88888	88889
6	±0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
	±0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
	±0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691

➢ 二维、三维数值积分 >> 高斯积分

◆ 由一维高斯积分推广而来：

二维

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(\xi,\eta)d\xi d\eta=\int_{-1}^{1}\sum_{j=1}^{n}H_jF(\xi_j,\eta)d\eta=\sum_{i=1}^{n}H_i\sum_{j=1}^{n}H_jF(\xi_j,\eta_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}H_iH_jF(\xi_j,\eta_i)=\sum_{i,j=1}^{n}H_{ij}F(\xi_j,\eta_i)$$

三维

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(\xi,\eta)d\xi d\eta d\zeta=\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}H_iH_jH_mF(\xi_i,\eta_j,\zeta_m)$$

$$=\sum_{m,j,i=1}^{n}H_{ijm}(\xi_i,\eta_j,\zeta_m)$$

在 ξ，η，ζ不同坐标方向上，也可以选不同的积分点数，即根据具体情况采用不同阶的积分方案。

➢ 数值积分的阶次选择

- ◆ 选择积分阶次的原则
  - ■ 保证积分的精度
  - ■ 保证结构总刚度矩阵 K 是非奇异的

    （施加边界条件后，K为满秩）

- 数值积分的精度与单元插值的精度应该搭配，并同时考虑雅克比行列式的影响。
- 以弹性力学问题为例，若单元插值的精度为p，应变矩阵的导数为1阶，若要刚度矩阵精确积分（称为完全积分），则在雅克比矩阵为常数的情况下，刚度矩阵的为2（p-1）阶多项式，对应高斯点个数至少为p^N个（对应2p-1阶积分精度）。
- 如果雅克比矩阵不为常数，即单元计算时使用了复杂的等参变换，那么为了得到精确（完全）的数值积分，积分精度在上述基础上还需要提高，所需高斯点个数也要进一步增加。

➢ 数值积分的阶次选择

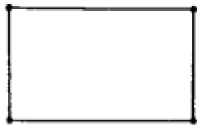
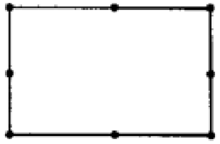
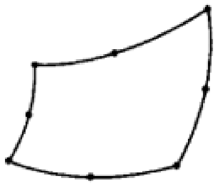
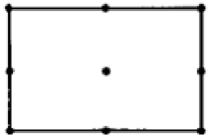
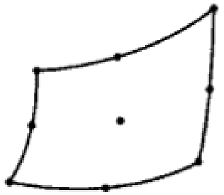
完全积分　高斯积分阶数等于被积函数所有项次精确积分所需阶数的积分方案

缩减积分　高斯积分阶数低于被积函数所有项次精确积分所需阶数的积分方案

- 缩减积分
  - 减缩积分往往比完全精确积分具有更好的精度。有限元精度由完全多项式方次决定，非完全的最高方次项并不能提高有限元精度，反而可能带来不好的影响。
  - 可能会使得刚度矩阵K奇异，导致求解结果失真，因此必须检查K的奇异性。

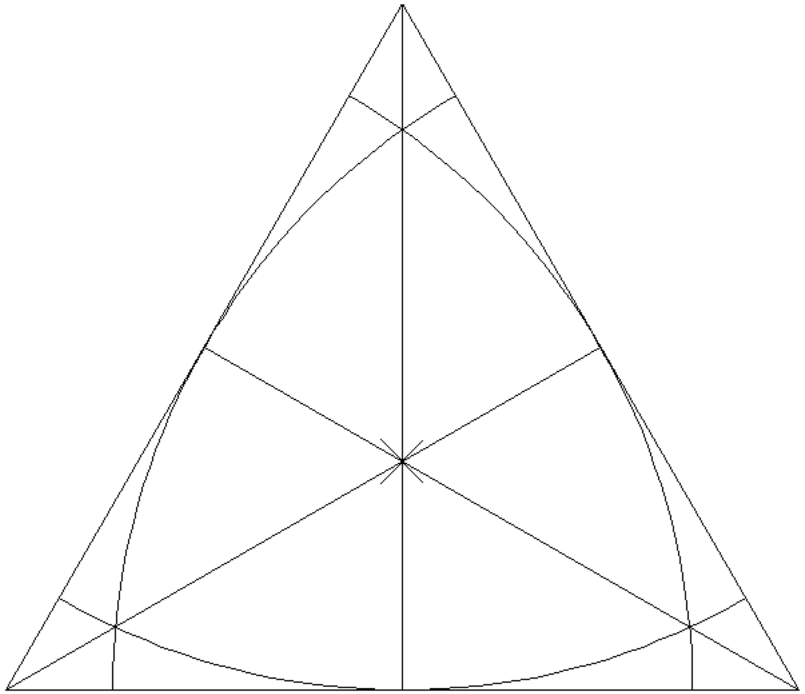
◆ 常用等参元

积分阶次

单　　元	常用积分阶数	最高积分阶数
4 结点矩形单元 	2×2	2×2
4 结点任意四边形单元 	2×2	3×3
8 结点矩形单元 	2×2	3×3
8 结点曲边单元 	3×3	4×4
9 结点矩形单元 	3×3	4×4
9 结点曲边单元 	3×3	4×4

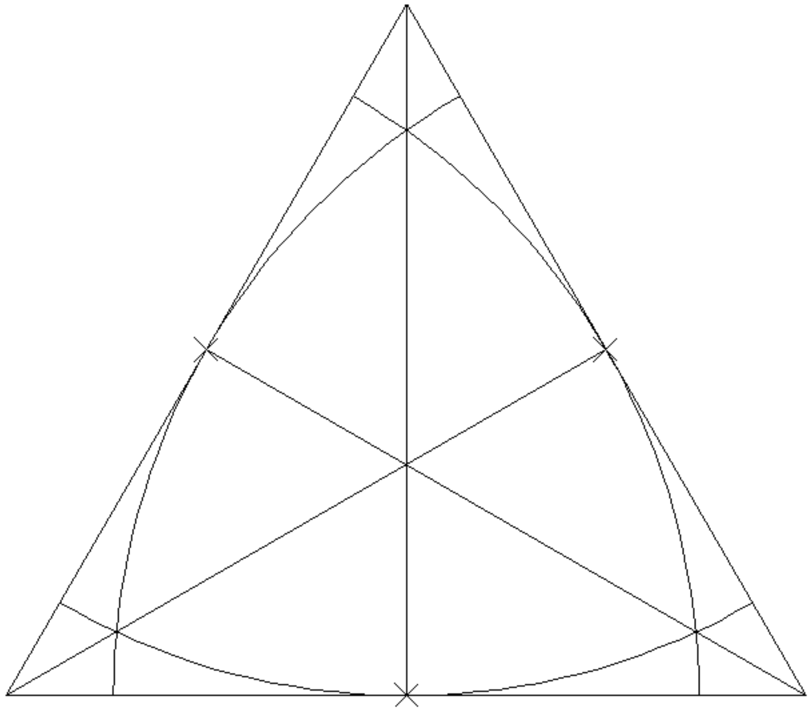
➢ 三角形、四面体数值积分 >> Hammer积分

- 三角形和四面体单元中，积分采用自然坐标的形式（分别为面积坐标和体积坐标）
- Hammer导出了有效的积分方案（称为Hammer积分）
- 对于二维三角形，积分点位置、权函数和误差量级如下页表所示



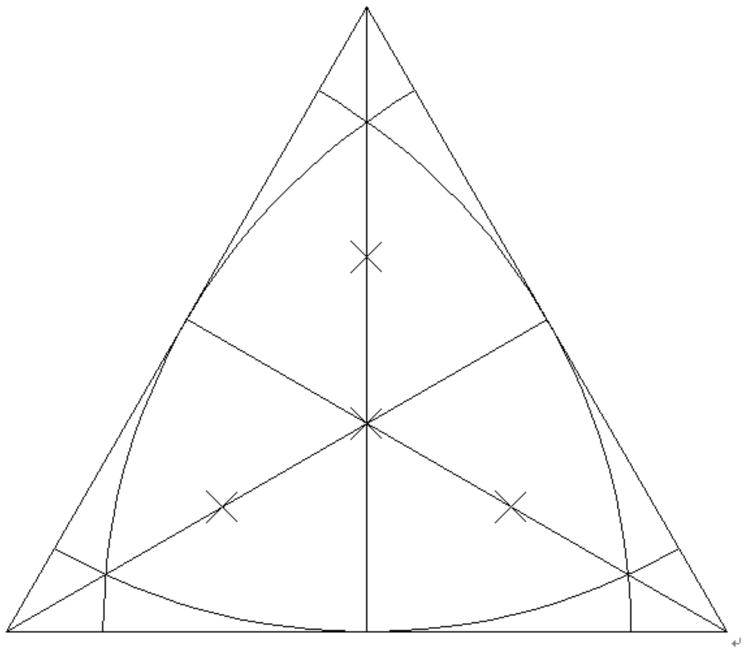
1次代数精度
1个点

权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
1	1/3	1/3	1/3



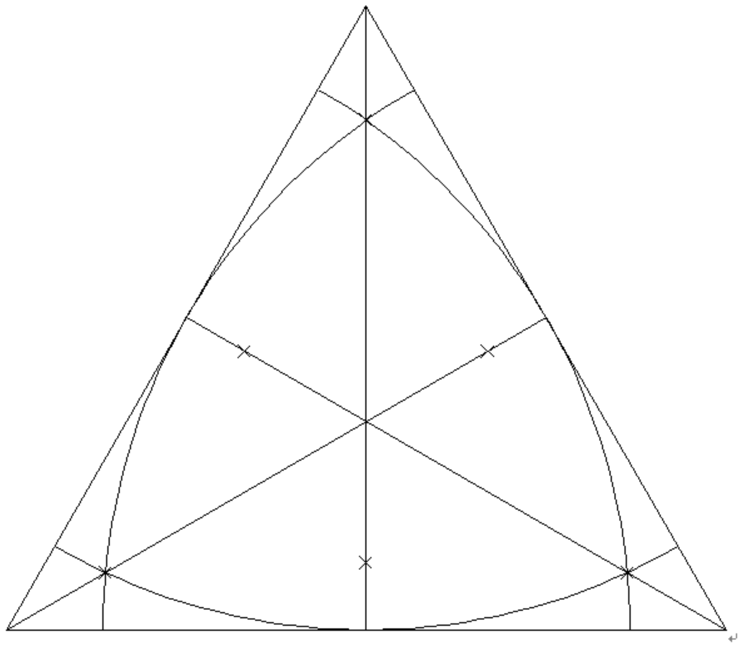
2次代数精度
3个点

权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
1/3	0.50	0.50	0.00
1/3	0.50	0.00	0.50
1/3	0.00	0.50	0.50



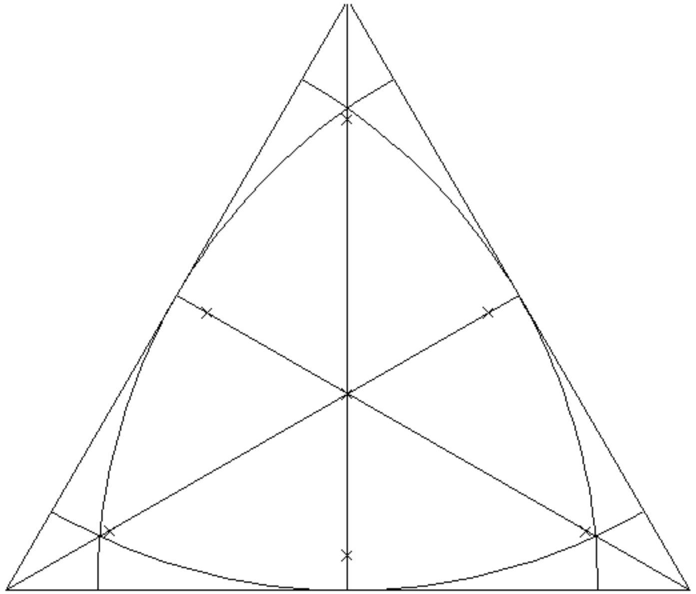
3次代数精度
4个点

	权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
中心点	- 9/16	1/3	1/3	1/3
其余点	25/48	0.60	0.20	0.20
	25/48	0.20	0.60	0.20
	25/48	0.20	0.20	0.60



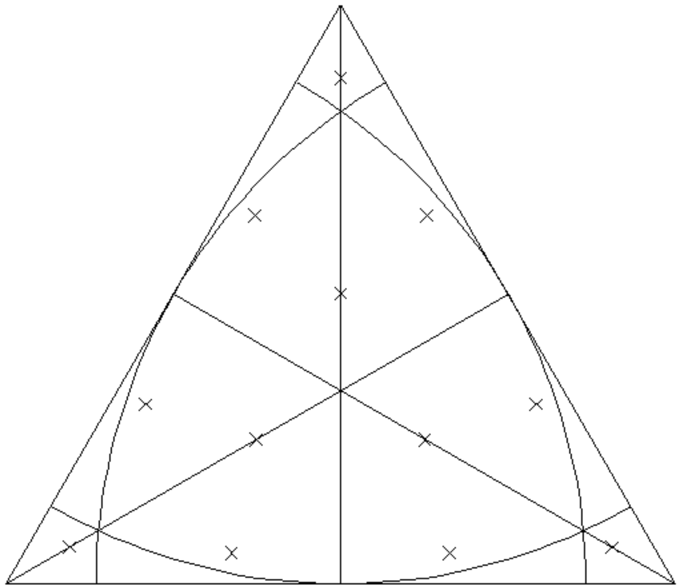
4次代数精度
6个点
（三个偏向角的点在外面）

	权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
靠近角的 3 点	0.109951743655322	0.816847572980459	0.091576213509771	0.091576213509771
	0.109951743655322	0.091576213509771	0.816847572980459	0.091576213509771
	0.109951743655322	0.091576213509771	0.091576213509771	0.816847572980459
其余 3 点	0.223381589678011	0.108103018168070	0.445948490915965	0.445948490915965
	0.223381589678011	0.445948490915965	0.108103018168070	0.445948490915965
	0.223381589678011	0.445948490915965	0.445948490915965	0.108103018168070



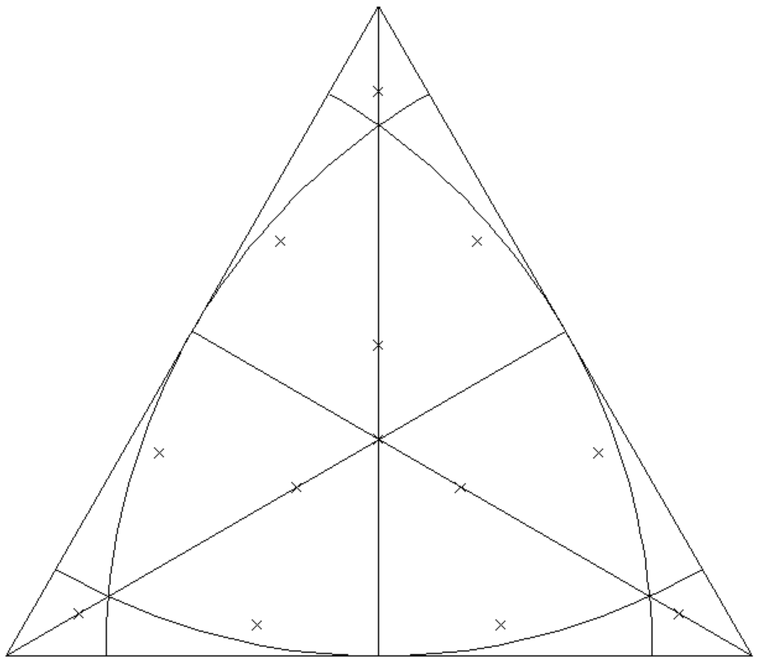
5次代数精度
7个点
（偏向角的点在里面）

	权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
中心点	0.225000000000000	0.333333333333333	0.333333333333333	0.333333333333333
靠近角的 3 点	0.125939180544827	0.797426985353087	0.101286507323456	0.101286507323456
	0.125939180544827	0.101286507323456	0.797426985353087	0.101286507323456
	0.125939180544827	0.101286507323456	0.101286507323456	0.797426985353087
其余 3 点	0.132394152788506	0.470142064105115	0.470142064105115	0.059715871789770
	0.132394152788506	0.470142064105115	0.059715871789770	0.470142064105115
	0.132394152788506	0.059715871789770	0.470142064105115	0.470142064105115



6次代数精度
12个点

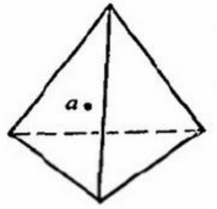
	权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
最中间的 3 点	0.116786275726379	0.501426509658179	0.249286745170910	0.249286745170910
	0.116786275726379	0.249286745170910	0.501426509658179	0.249286745170910
	0.116786275726379	0.249286745170910	0.249286745170910	0.501426509658179
最靠近角的 3 点	0.050844906370207	0.873821971016996	0.063089014491502	0.063089014491502
	0.050844906370207	0.063089014491502	0.873821971016996	0.063089014491502
	0.050844906370207	0.063089014491502	0.063089014491502	0.873821971016996
其余 6 点	0.082851075618374	0.636502499121399	0.310352451033785	0.053145049844816
	0.082851075618374	0.636502499121399	0.053145049844816	0.310352451033785
	0.082851075618374	0.310352451033785	0.636502499121399	0.053145049844816
	0.082851075618374	0.310352451033785	0.053145049844816	0.636502499121399
	0.082851075618374	0.053145049844816	0.636502499121399	0.310352451033785
	0.082851075618374	0.053145049844816	0.310352451033785	0.636502499121399

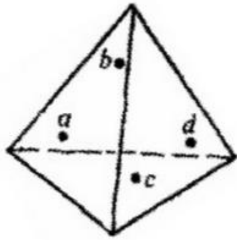


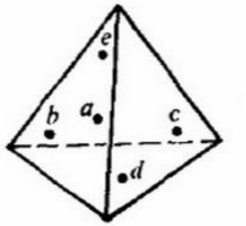
7次代数精度
13个点

	权重	面积坐标 1	面积坐标 2	面积坐标 3
中心点	-0.149570044467670	0.333333333333333	0.333333333333333	0.333333333333333
紧靠中心的 3 点	0.175615257433204	0.479308067841923	0.260345966079038	0.260345966079038
	0.175615257433204	0.260345966079038	0.479308067841923	0.260345966079038
	0.175615257433204	0.260345966079038	0.260345966079038	0.479308067841923
最靠近角的 3 点	0.053347235608839	0.869739794195568	0.065130102902216	0.065130102902216
	0.053347235608839	0.065130102902216	0.869739794195568	0.065130102902216
	0.053347235608839	0.065130102902216	0.065130102902216	0.869739794195568
其余 6 点	0.077113760890257	0.638444188569809	0.312865496004875	0.048690315425316
	0.077113760890257	0.638444188569809	0.048690315425316	0.312865496004875
	0.077113760890257	0.048690315425316	0.638444188569809	0.312865496004875
	0.077113760890257	0.048690315425316	0.312865496004875	0.638444188569809
	0.077113760890257	0.312865496004875	0.638444188569809	0.048690315425316
	0.077113760890257	0.312865496004875	0.048690315425316	0.638444188569809

四面体数值积分所选用的公式



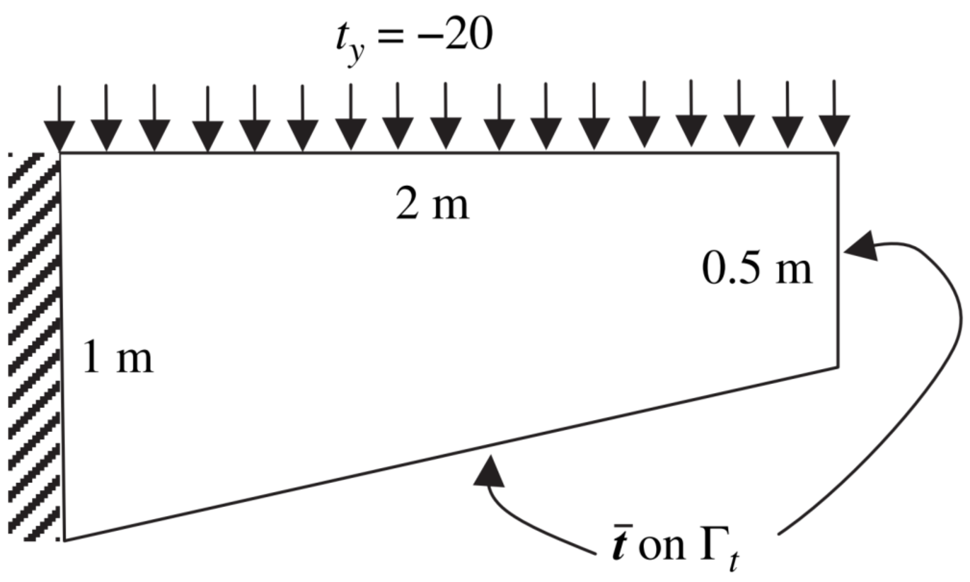




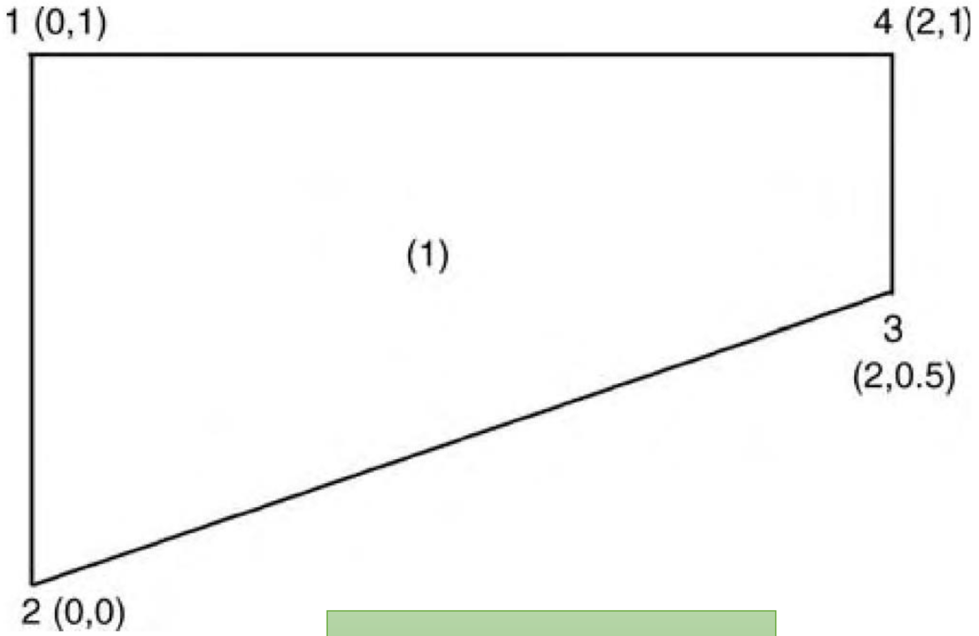
积分点数	精度等级	坐标(r_i, s_i, t_i)	权重 W_i
1	1	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	1.0
4	2	$(a,b,b),(b,b,b),(b,b,a),(b,a,b)$ 其中 $a=\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$, $b=\frac{5-\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{4}$
5	3	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	$-\frac{4}{5}$
		$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$	$\frac{9}{20}$

◆ 二维Q4单元算例

Traction $\bar{t}_y = -20\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ is applied on the top horizontal edge. Material properties are Young's modulus $E = 3 \times 10^7\,\mathrm{Pa}$ and Poisson's ratio $\nu = 0.3$. Plane stress conditions are considered. The problem is discretized using one quadrilateral element. The finite element mesh and nodal coordinates in meters are shown in Figure 9.12.



物理模型

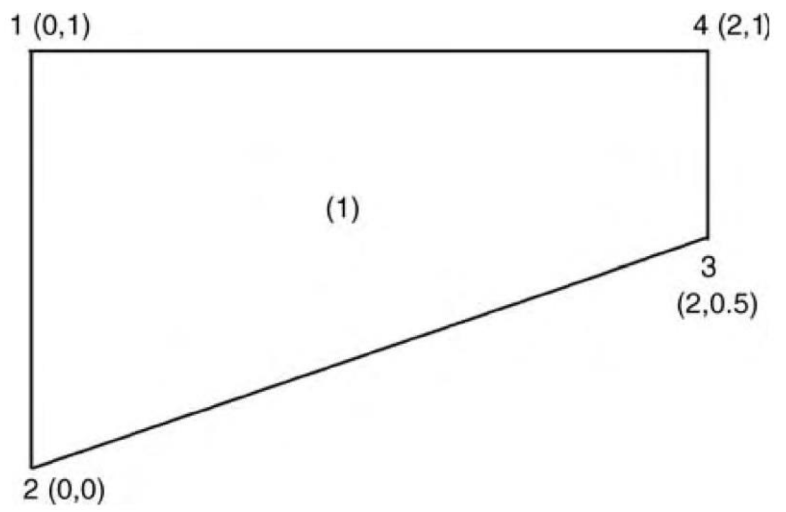


有限元网格

$$[\mathbf{x}^e\ \mathbf{y}^e] = \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

◆ 二维Q4单元算例

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$$

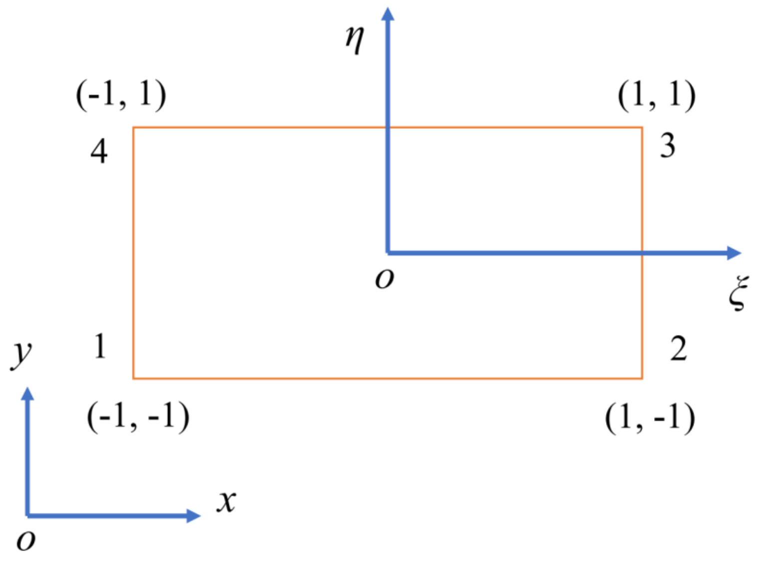


$$N_1^{4Q}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$

$$N_2^{4Q}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$N_3^{4Q}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),$$

$$N_4^{4Q}(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta),$$



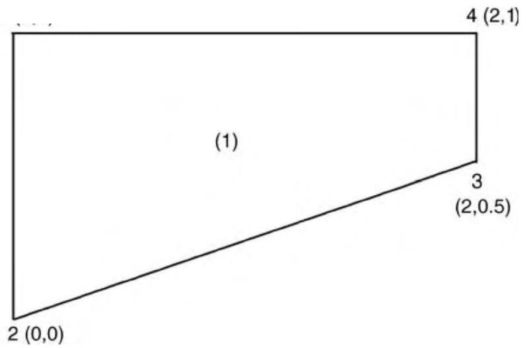
◆ 二维Q4单元算例

$$
\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix}
$$

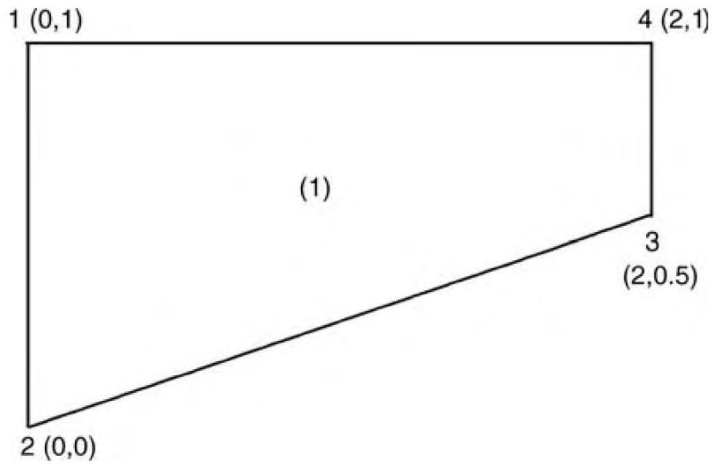
$$
= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \eta - 1 & 1 - \eta & 1 + \eta & -\eta - 1 \\ \xi - 1 & -\xi - 1 & 1 + \xi & 1 - \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.125\eta - 0.375 \\ 1 & 0.125\xi + 0.125 \end{bmatrix}.
$$

$$
|\mathbf{J}^e| = -0.125\eta + 0.375,
$$

$$
(\mathbf{J}^e)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+\xi}{3-\eta} & 1 \\ \dfrac{8}{\eta - 3} & 0 \end{bmatrix}.
$$



◆ 二维Q4单元算例

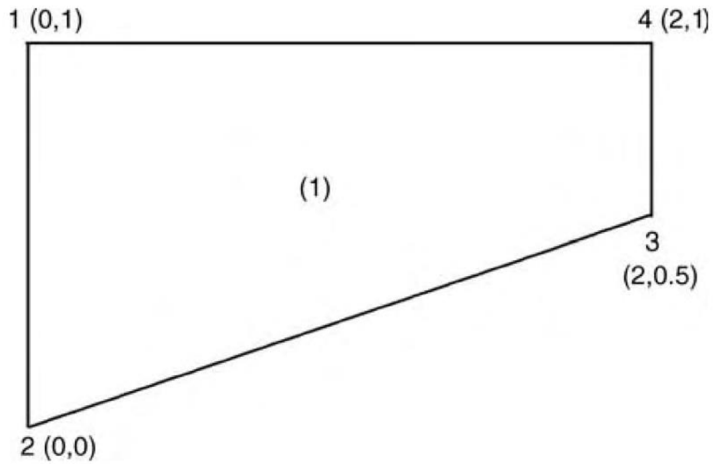


$$
\mathbf{B}^e = \begin{bmatrix}
\frac{\partial N_1^{4Q}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^{4Q}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3^{4Q}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4^{4Q}}{\partial x} & 0 \\
0 & \frac{\partial N_1^{4Q}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^{4Q}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3^{4Q}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4^{4Q}}{\partial y} \\
\frac{\partial N_1^{4Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_1^{4Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_2^{4Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_2^{4Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_3^{4Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_3^{4Q}}{\partial x} & \frac{\partial N_4^{4Q}}{\partial y} & \frac{\partial N_4^{4Q}}{\partial x}
\end{bmatrix}
$$

◆ 二维Q4单元算例

高斯积分

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad W_1 = W_2 = 1.$$



$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(1)} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{D}^{e}\mathbf{B}^{e}\, \mathrm{d}\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{D}^{e}\mathbf{B}^{e}|\mathbf{J}^{e}|\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} W_i W_j \left|\mathbf{J}^{e}(\xi_i, \eta_j)\right| \mathbf{B}^{e\mathrm{T}}(\xi_i, \eta_j)\mathbf{D}^{e}\mathbf{B}^{e}(\xi_i, \eta_j).$$

◆ 二维Q4单元算例

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}$$

We calculate the stiffness $\mathbf{K}^e$ at a Gauss point $(\xi_1, \eta_1) = (-(1/\sqrt{3}), -(1/\sqrt{3}))$.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial y} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\xi_1,\eta_1)} = (\mathbf{J}^e)^{-1}(\xi_1,\eta_1) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_1^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_3^{4Q}}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_4^{4Q}}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{(\xi_1,\eta_1)}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.44 & -0.06 & 0.12 & 0.38 \\ 0.88 & -0.88 & -0.24 & 0.24 \end{bmatrix}.$$

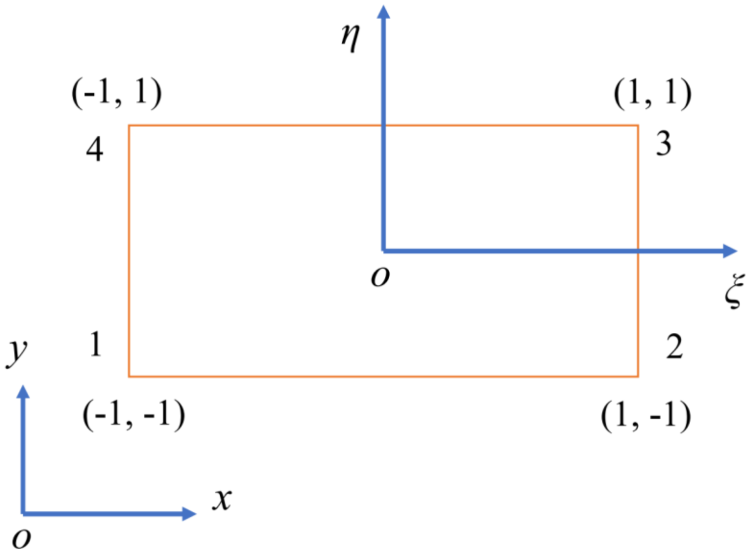
$$\mathbf{B}^e(\xi_1,\eta_1) = \begin{bmatrix} -0.44 & 0 & -0.06 & 0 & 0.12 & 0 & 0.38 & 0 \\ 0 & 0.88 & 0 & -0.88 & 0 & -0.24 & 0 & 0.24 \\ 0.88 & -0.44 & -0.88 & -0.06 & -0.24 & 0.12 & 0.24 & 0.38 \end{bmatrix}$$

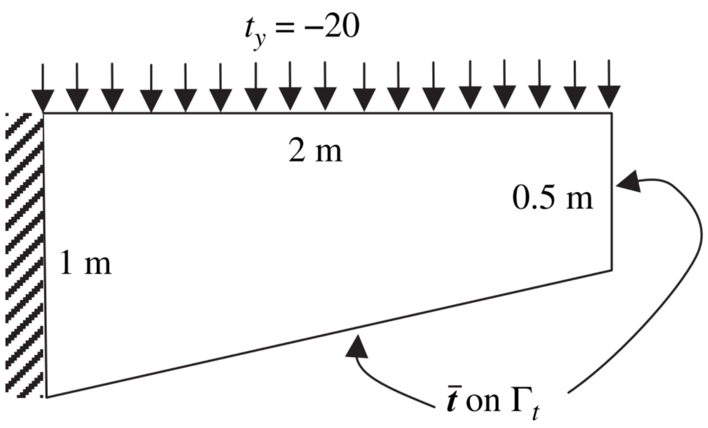
◆ 二维Q4单元算例

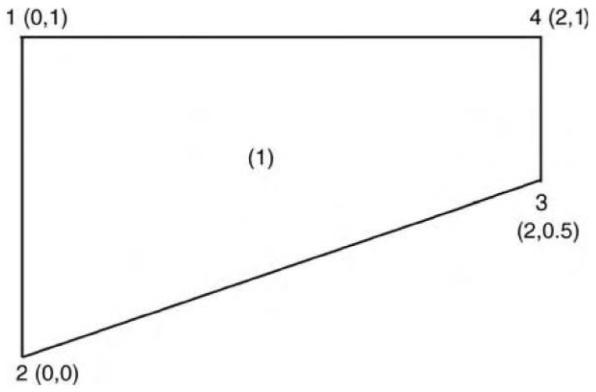
$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\mathbf{K}^e(\xi_i,\eta_j)$$

$$= 10^7 \begin{bmatrix} 1.49 & -0.74 & -0.66 & 0.16 & -0.98 & 0.65 & 0.15 & -0.08 \\ & 2.75 & 0.24 & -2.46 & 0.66 & -1.68 & -0.16 & 1.39 \\ & & 1.08 & 0.33 & 0.15 & -0.16 & -0.56 & -0.41 \\ & & & 2.6 & -0.08 & 1.39 & -0.41 & -1.53 \\ & & & & 2 & -0.82 & -1.18 & 0.25 \\ & \text{SYM} & & & & 3.82 & 0.33 & -3.53 \\ & & & & & & 1.59 & 0.25 \\ & & & & & & & 3.67 \end{bmatrix}.$$

◆ 二维Q4单元算例

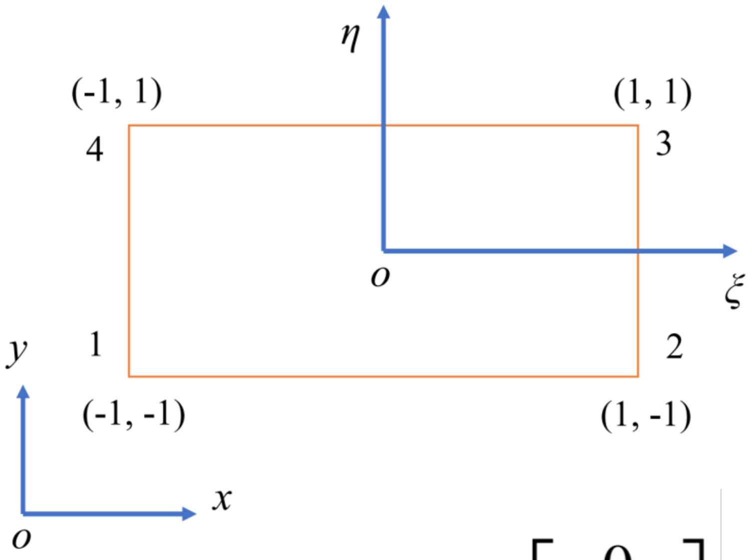


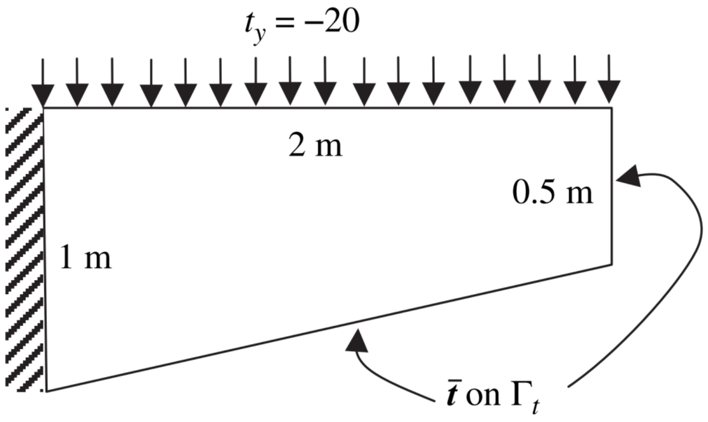


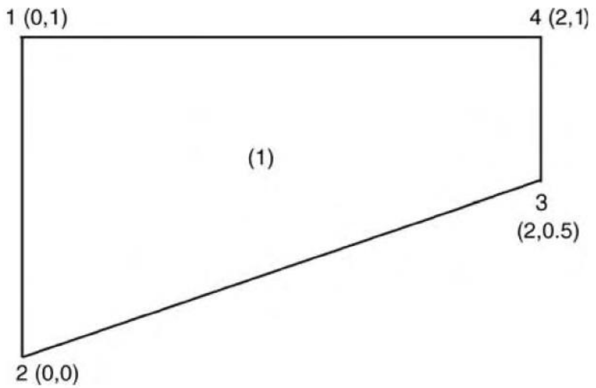


$$\mathbf{f}_{\Gamma}^{e} = \int_{\Gamma_{14}} (\mathbf{N}^{4Q})^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{t}}\, \mathrm{d}\Gamma = \int_{\eta=-1}^{1} (\mathbf{N}^{4Q})^{\mathrm{T}} (\xi = -1, \eta)\, \mathrm{d}\eta \bar{\mathbf{t}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

◆ 二维Q4单元算例



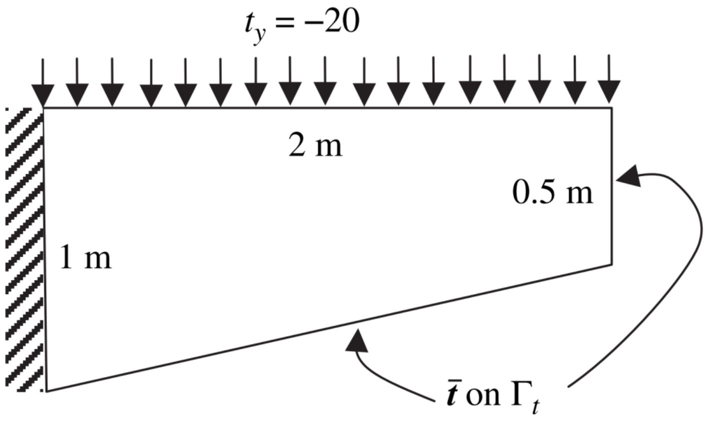


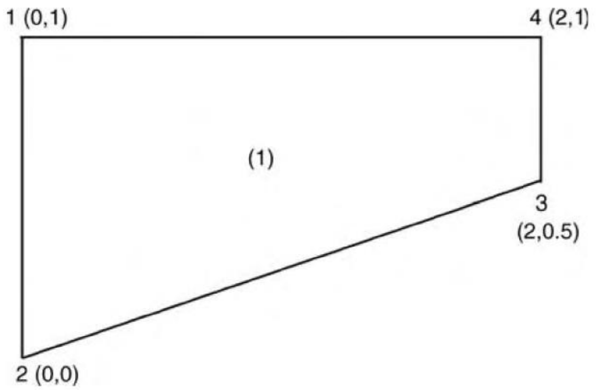


$$\mathbf{f}_\Gamma^e = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_\Gamma^e + \mathbf{r}^e = \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} - 20 \\ r_{x2} \\ r_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}$$

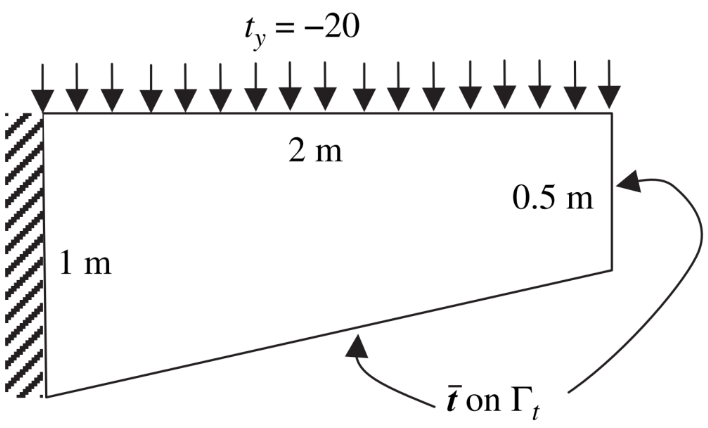
◆ 二维Q4单元算例

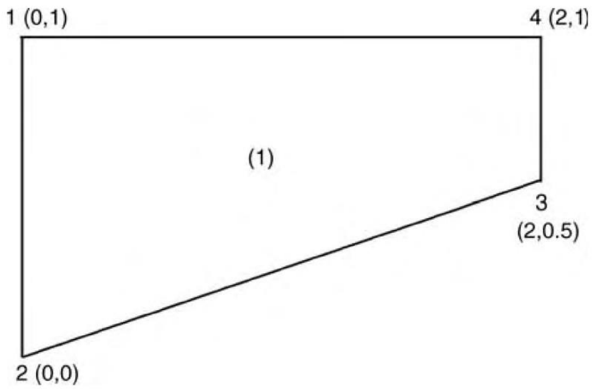




$$
10^7
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1.49 & -0.74 & -0.66 & 0.16 & -0.98 & 0.65 & 0.15 & -0.08 \\
 & 2.75 & 0.24 & -2.46 & 0.66 & -1.68 & -0.16 & 1.39 \\
 & & 1.08 & 0.33 & 0.15 & -0.16 & -0.56 & -0.41 \\
 & & & 2.6 & -0.08 & 1.39 & -0.41 & -1.53 \\
\hline
 & & & & 2 & -0.82 & -1.18 & 0.25 \\
 & \text{SYM} & & & & 3.82 & 0.33 & -3.53 \\
 & & & & & & 1.59 & 0.25 \\
 & & & & & & & 3.67
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} - 20 \\ r_{x2} \\ r_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}
$$

◆ 二维Q4单元算例

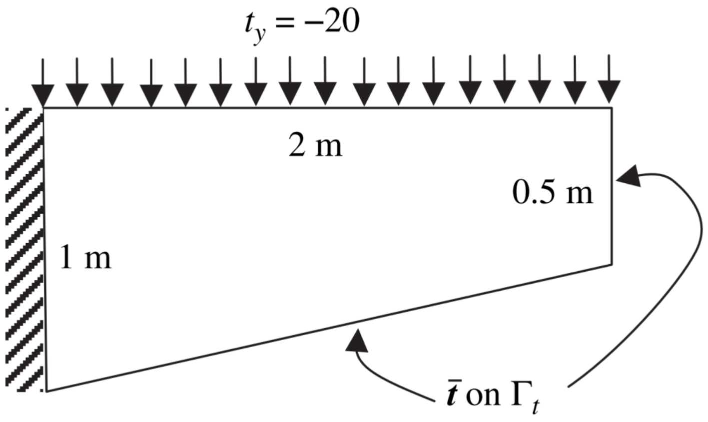


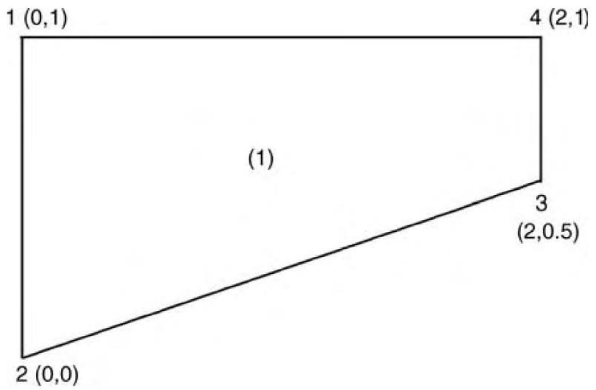


$$10^7 \begin{bmatrix} 2 & -0.82 & -1.18 & 0.25 \\ & 3.82 & 0.33 & -3.53 \\ & & 1.59 & 0.25 \\ \mathrm{SYM} & & & 3.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x3} \\ u_{y3} \\ u_{x4} \\ u_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}^e = 10^{-6} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.17 \\ -9.67 \\ 2.67 \\ -9.94 \end{bmatrix}$$

◆ 二维Q4单元算例





The resulting strains and stresses at the four Gauss points are

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_i,\eta_j) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^e_{(\xi_i,\eta_j)} = \mathbf{B}^e(\xi_i,\eta_j)\mathbf{d}^e, \qquad \boldsymbol{\sigma}^e(\xi_i,\eta_j) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^e_{(\xi_i,\eta_j)} = \mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_i,\eta_j),$$

◆ 二维Q4单元算例

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_1,\eta_1)=\mathbf{B}^e(\xi_1,\eta_1)\mathbf{d}^e=10^7\begin{bmatrix}-3.61\\-0.628\\-39.4\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}^e(\xi_1,\eta_1)=\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_1,\eta_1)=\begin{bmatrix}-12.5\\-5.64\\-45.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_1,\eta_2)=\mathbf{B}^e(\xi_1,\eta_2)\mathbf{d}^e=10^7\begin{bmatrix}8.82\\-0.628\\-40.3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}^e(\xi_1,\eta_2)=\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_1,\eta_2)=\begin{bmatrix}28.5\\6.65\\-46.5\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_2,\eta_1)=\mathbf{B}^e(\xi_2,\eta_1)\mathbf{d}^e=10^7\begin{bmatrix}-11.7\\-3.45\\2.21\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}^e(\xi_2,\eta_1)=\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_2,\eta_1)=\begin{bmatrix}-42.0\\-23.0\\2.55\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_2,\eta_2)=\mathbf{B}^e(\xi_2,\eta_2)\mathbf{d}^e=10^7\begin{bmatrix}6.65\\-3.46\\0.95\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\sigma}^e(\xi_2,\eta_2)=\mathbf{D}^e\boldsymbol{\varepsilon}^e(\xi_2,\eta_2)=\begin{bmatrix}18.5\\-4.82\\1.09\end{bmatrix}.$$

大型软件应用

有限单元法(finite element method)

刘治军 青年研究员

土木工程系

liuzhijun@lzu.edu.cn

第7讲　有限元误差分析

本讲内容

7.1 引言

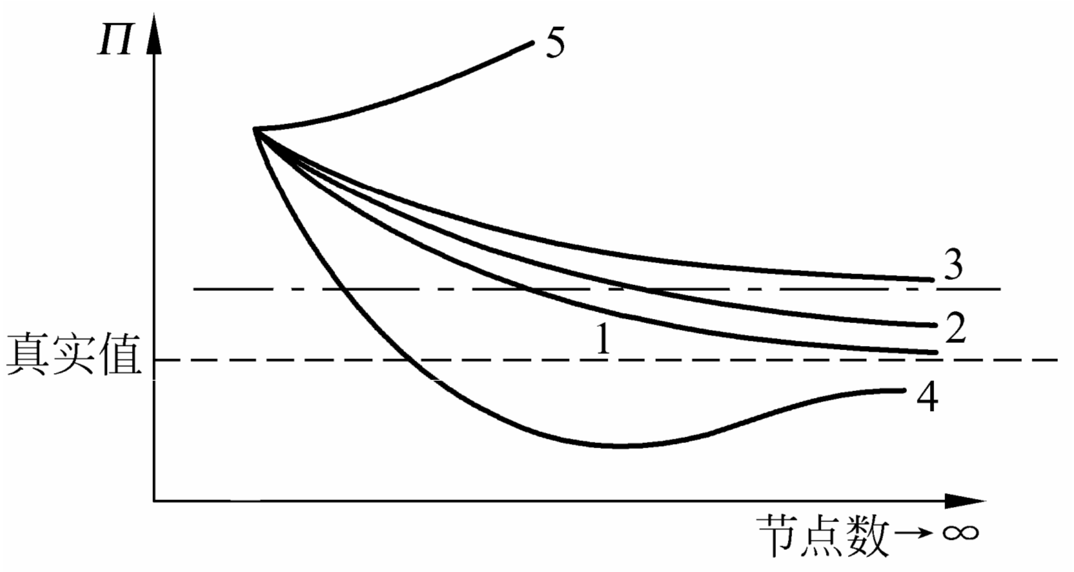
7.1 引言

■ 弱形式和强形式完全等价(虚功原理等价于平衡方程和应力边界条件)。但是，弱形式中的测试函数(test function，在虚功原理中就是位移的变分)要求是某个无限维空间中的任一函数(满足光滑性要求的任何函数)，弱形式的精确解同样处于无限维空间中。而有限元中的测试函数采用了有限插值，因此有限元解只是对弱形式精确解的一种近似，因而存在误差。

■ 有限元=变分原理+分片近似。

收敛性

在有限元分析中，当节点数目趋于无穷大时（即当单元尺寸趋近于零时）或单元插值位移的项数趋于无穷大时，最后的解答如果能够无限地逼近准确解，那么这样的位移函数（或形状函数）是逼近于真解的，这就称为**收敛(convergence)**。

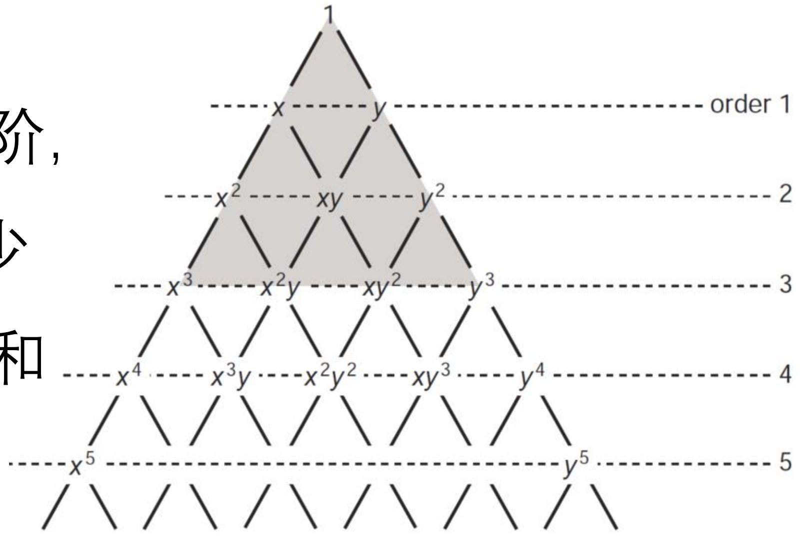


1和2单调收敛，1收敛速度更快；
3没有收敛到真实解；
4不单调收敛(可能出现于非协调元的情形)；
5发散；

收敛性准则

收敛性准则 1： 完备性要求(针对单元内部)

◆如果在泛函或者弱形式中所出现位移函数的最高阶导数是 m 阶，则有限元解答收敛的条件之一是选区单元内的位移场函数至少是 m 阶完全多项式。对于弹性力学问题就是要包含刚体位移和常应变项。



Pascal 三角形

◆不完备的高阶项通常对收敛率无贡献，因此多项式形式的位移通常从低阶到高阶选取完备多项式(Serendipity单元的例子)；

◆二维问题按照pascal三角形选取，三维按照pascal四面体选取。

收敛性准则

收敛性准则 2： 协调性要求(针对单元之间)

◆积分的要求：如果在（势能）泛函中位移函数出现的最高阶导数是 m 阶，则位移函数在单元交界面上必须具有直至(m-1)阶的连续导数，即 C_{m-1} 连续性。

◆协调(conforming)元通常单调收敛；非协调元可能不单调收敛；

◆通常的二维、三维弹性力学问题等二阶偏微分方程问题要求C_0型单元，四阶偏微分方程问题(Euler-Bernoulli梁和Kirchhoff板)要求C_1型单元。

收敛性准则

◆由于位移函数的收敛性准则包含完备性和协调性这两个方面的要求，而完备性要求(刚体位移及常应变)比较容易得到满足，而协调性要求(位移的连续性)则较难满足，因此，人们研究单元的收敛性问题时，往往只集中讨论单元的协调性问题。在有些情况下，使用非协调单元也可以得到工程上满意的解答，甚至有时竟比协调单元具有更好的计算精度，这是由于位移不协调所造成的误差与来自其它方面的误差相互进行抵消的缘故。

有限元解的下限性质

最小势能原理：满足几何约束(这里指几何方程和位移边界条件)的所有变形状态中，真实状态(满足平衡方程和应力边界条件)对应的势能最小。(这里所有的状态都满足物理方程-本构关系)

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}) C_{ijkl} (\varepsilon_{kl}+\delta\varepsilon_{kl})\, d\Omega$$

$$-\int_\Omega f_i (u_i+\delta u_i)\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i (u_i+\delta u_i)\, d\Gamma$$

$$\Pi_1 - \Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} C_{ijkl}\, \delta\varepsilon_{kl}\, d\Omega + \int_\Omega \varepsilon_{ij} C_{ijkl}\, \delta\varepsilon_{kl}\, d\Omega$$

$$-\int_\Omega f_i\, \delta u_i\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta u_i\, \bar{t}_i\, d\Gamma$$

$$\int \varepsilon_{ij} C_{ijkl}\, \delta\varepsilon_{kl}\, d\Omega = \int_\Omega \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_l}\, d\Omega$$

$$= \int_{\partial\Omega} C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij}\, n_l\, \delta u_k\, d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}(C_{ijkl}\, \varepsilon_{ij})\, \delta u_k\, d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} C_{klij}\, \varepsilon_{ij}\, n_l\, \delta u_k\, d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_l}(C_{klij}\, \varepsilon_{ij})\, \delta u_k\, d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} \delta u_k\, \sigma_{kl}\, n_l\, d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}\, \delta u_k\, d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma_t} \delta u_k\, \bar{t}_k\, d\Gamma + \int_\Omega \delta u_k\, f_k\, d\Omega$$

$$\Pi_1 - \Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} C_{ijkl}\, \delta\varepsilon_{kl}\, d\Omega$$

由于C的正定性. $\Pi_1 - \Pi \geq 0$ 并且仅当 $\delta\varepsilon = 0$ 时等号成立. 又由于在 Γ_u 上 $\delta u = 0$. 因此当且仅当 $\delta u = 0$ 时等号成立

有限元解的下限性质

由前面的推导可知，所分析对象系统的总势能为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{P}^T\mathbf{q} \qquad (5\text{-}105)$$

由最小势能原理 $\delta\Pi = 0$，可得到有限元分析求解的刚度方程

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P} \qquad (5\text{-}106)$$

再将式(5-106)代入式(5-105)得到

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{P}^T\mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q} = -U = -\frac{W}{2} \qquad (5\text{-}107)$$

即在平衡情况下，系统总势能等于负的应变能。

只有真正的精确解才能得到真正最小的总势能 Π_{exact}，而在实际问题中，由于采用了离散方法而得到的总势能 Π_{appr}，一定是 $\Pi_{appr} \geq \Pi_{exact}$ 的，由式(5-107)可知，则有

$$U_{appr} \leq U_{exact} \qquad (5\text{-}108)$$

有限元解的下限性质

设对应于近似解的节点位移列阵为 $\mathbf{q}_{appr}$，刚度矩阵为 $\mathbf{K}_{appr}$，则对应的刚度方程为

$$\mathbf{K}_{appr}\mathbf{q}_{appr} = \mathbf{P} \tag{5-109}$$

设对应于精确解的节点位移列阵为 $\mathbf{q}_{exact}$，刚度矩阵为 $\mathbf{K}_{exact}$，则对应的刚度方程为

$$\mathbf{K}_{exact}\mathbf{q}_{exact} = \mathbf{P} \tag{5-110}$$

那么，这两种解答所对应的应变能为

$$\left.\begin{aligned} U_{appr} &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_{appr}^{T}\mathbf{K}_{appr}\mathbf{q}_{appr} \\ U_{exact} &= \frac{1}{2}\mathbf{q}_{exact}^{T}\mathbf{K}_{exact}\mathbf{q}_{exact} \end{aligned}\right\} \tag{5-111}$$

有限元解的下限性质

将上式代入式(5-108)中，有

$$\frac{1}{2}\mathbf{q}_{appr}^{T}\mathbf{K}_{appr}\mathbf{q}_{appr} \le \frac{1}{2}\mathbf{q}_{exact}^{T}\mathbf{K}_{exact}\mathbf{q}_{exact} \tag{5-112}$$

考虑到式(5-109)和式(5-110)，式(5-112)可以写成

$$\mathbf{q}_{appr}^{T}\mathbf{P} \le \mathbf{q}_{exact}^{T}\mathbf{P} \tag{5-113}$$

有限元解的下限性质

$$\mathbf{q}_{appr}^{T}\mathbf{P} \le \mathbf{q}_{exact}^{T}\mathbf{P}$$

◆基于近似解的应变能比精确的应变能要小，近似解的位移总体上比精确的位移 要小，也就是说近似解具有下限性质。

◆上述的推倒中假定有限元的荷载向量就是精确地荷载向量，这点通常不满足，因此上述的论证并不严密。

◆上述下限性质只是能量意义上的，并不是逐点满足；但在一些特殊点上可能满足(例如悬臂梁右端点的位移有限元解小于精确解)。

上下限

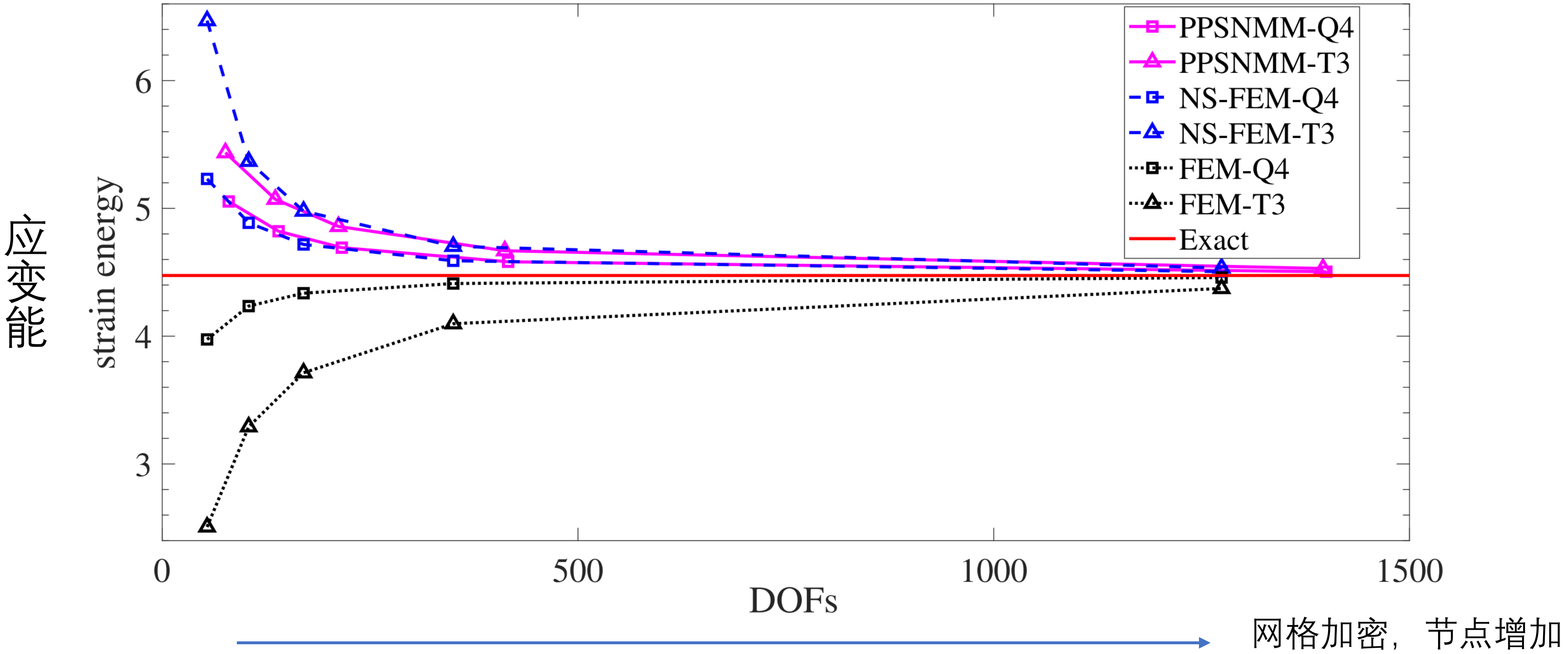


Figure 13: Strain energies of the cantilever obtained with different methods.

有限元对模型的刚化

◆位移解的下限性质可以进行如下解释：原连续体从理论上来说具有无穷多个自由度，而采用有限单元的方法对原连续体进行离散，即使用了有限个自由度来近似描述原具有无穷多个自由度的系统，那么必然使得原系统的刚度增加，变得更加刚化(stiffening)，即刚度矩阵的总体数值变大，由刚度方程可知，在外力相同的情况下，所求得的位移值在总体上将变小。

◆刚性体现在变形的可能性变小，通常节点数越少、越简单的单元刚性越大，误差越大。例如三角形单元比四边形单元刚性大，四面体单元比六面体单元刚性大。

误差的度量

◆ 单个点或者单元内解的误差难以反应有限元解的整体质量，一般定义一些误差的范数来评估解的质量。

◆ 对于二阶问题(例如弹性力学问题)，常用的误差范数：

■ 位移误差范数

$$e_d = \left(\frac{\int_\Omega (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \mathrm{d}\Omega} \right)^{1/2}$$

分母用于归一化，整体表示相对误差。

■ 能量误差范数

$$e_e = \left(\frac{\int_\Omega (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^h) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^h) \mathrm{d}\Omega}{\int_\Omega \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \mathrm{d}\Omega} \right)^{1/2}$$

这两个范数分别表示位移和应力/应变的求解质量。

收敛率

- 如果场变量(例如位移)的近似包含直到p阶完全多项式，单元特征尺寸(例如正方形单元长度)为h，按照Taylor级数理论，它的误差就是$O(h^{p+1})$量级。例如，平面三角形单元插值函数为线性，它的近似误差是$O(h^2)$量级。如果单元尺寸减半，那么误差将变为原来的1/4。
- 对于场变量的导数(例如应变、应力)等变量，如果由场变量的m阶导数表示，那么它的误差就是$O(h^{p+1-m})$量级。对于三角形单元，p=1，m=1，能量误差就是$O(h)$量级。

收敛率

- ◆ 这里讨论的误差仅仅指有限元场变量近似引起的误差，实际求解中的误差还包括：1）计算机数值计算引起的误差；2）曲线边界等离散不精确引起的误差等。

$$e = ah^k$$

$$\log e = \log a + k \log h$$

收敛率就是双对数坐标系中的直线斜率k。

- ◆ 对于线性单元(例如一维的2节点单元，二维的三节点三角形和四节点四边形单元)，其位移范数收敛率为2，能量范数收敛率为1。

收敛率

对于满足完备性和协调性要求的协调单元，由于当单元尺寸 $h \to 0$ 时，有限元分析的结果是单调收敛的。所以还可以就两次网格划分所计算的结果进行外推，以估计结果的准确值。如第一次网格划分的解答是 u_1，然后将各单元尺寸减半作为第二次的网格划分，得到解答为 u_2。如果该单元的收敛速度是 $O(h^s)$，则可由下式来对准确解 u 进行估计

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^s)}{O((h/2)^s)} \tag{5-115}$$

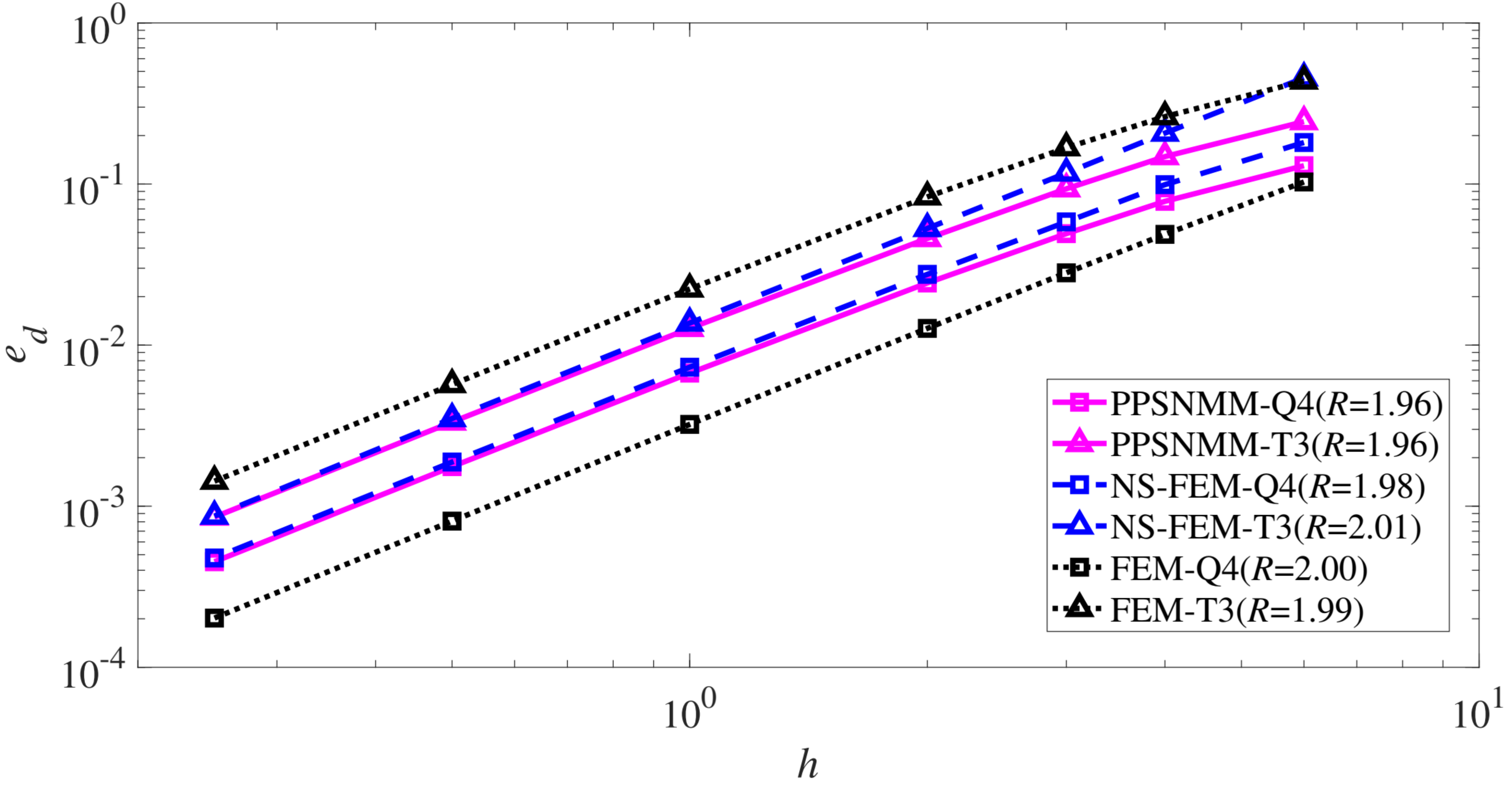
具体就平面三节点三角形单元，有 s=2，上式可写为

$$\frac{u_1 - u}{u_2 - u} = \frac{O(h^2)}{O((h/2)^2)} = 4 \tag{5-116}$$

即可估计出准确解为

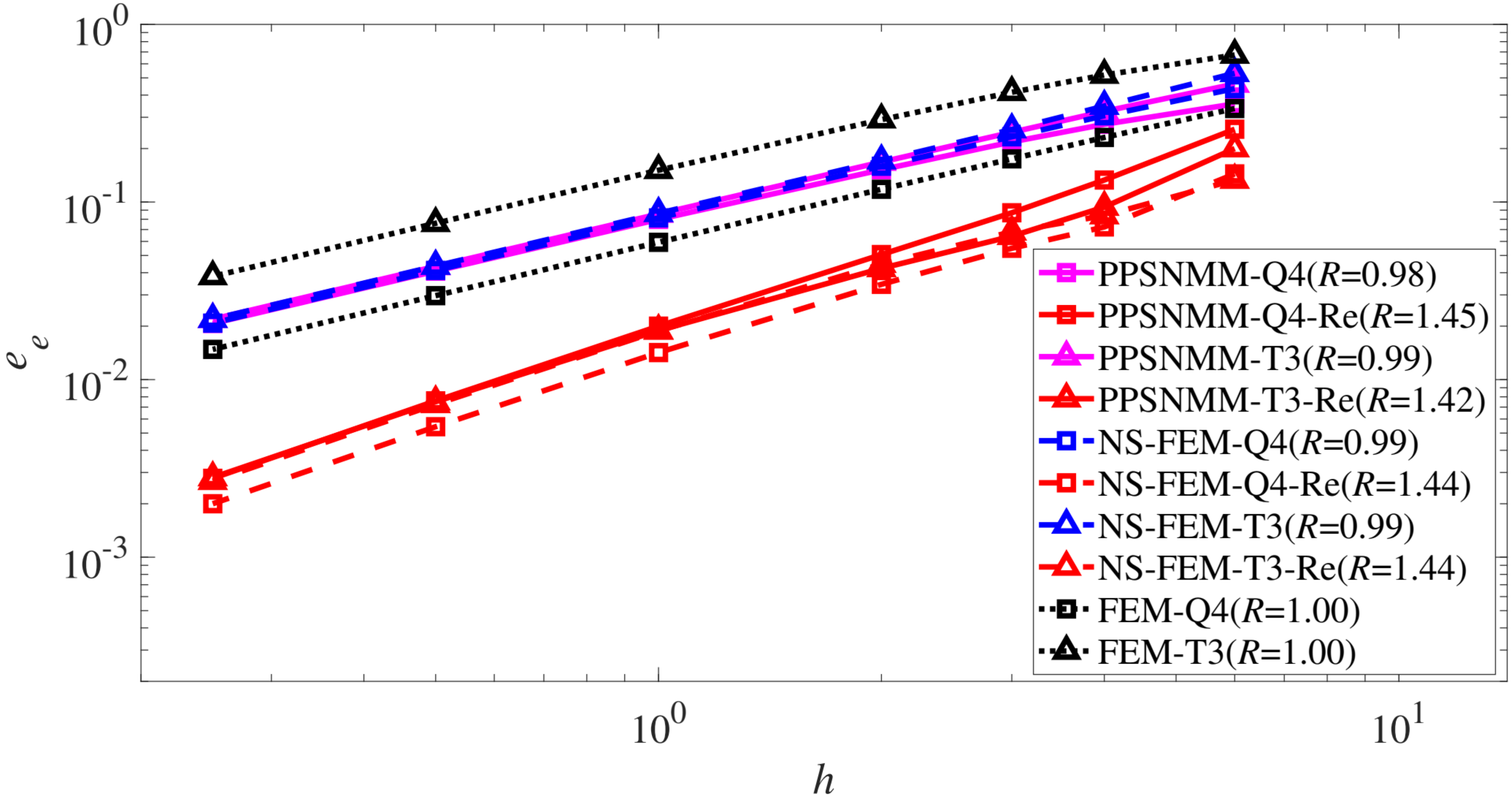
$$u = \frac{1}{3}(4u_2 - u_1) \tag{5-117}$$

收敛率



10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
e_d
10^{0}
10^{1}
h
PPSNMM-Q4(R=1.96)
PPSNMM-T3(R=1.96)
NS-FEM-Q4(R=1.98)
NS-FEM-T3(R=2.01)
FEM-Q4(R=2.00)
FEM-T3(R=1.99)

收敛率



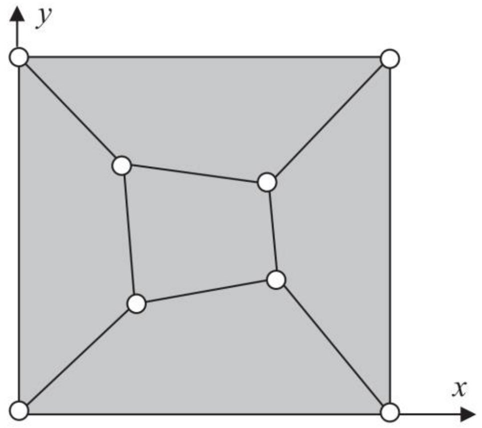
PPSNMM-Q4(R=0.98)
PPSNMM-Q4-Re(R=1.45)
PPSNMM-T3(R=0.99)
PPSNMM-T3-Re(R=1.42)
NS-FEM-Q4(R=0.99)
NS-FEM-Q4-Re(R=1.44)
NS-FEM-T3(R=0.99)
NS-FEM-T3-Re(R=1.44)
FEM-Q4(R=1.00)
FEM-T3(R=1.00)
e_e
h
10^0
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^0
10^1

解的检验-verification and validation

Verification: Are the equations being solved correctly?

Validation: Are the right equations being solved?

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y$$
$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y$$



Verification的一个重要途径:分片检验(patch test)

The patch test is based on the properties of linear completeness and the fact that if a finite element approximation contains the exact solution, then the finite element program must obtain that exact solution.

- 求解域通常取一个简单的区域求解无体力弹性力学问题，例如对二维问题常用边长为1的正方向区域。
- 一般要求网格包含不规则单元，因为有些单元对规则形状的单元表现良好，但对于不规则单元表现差(可能不收敛)。
- 网格中单元不宜过多。
- 在整个求解域边界上设置位移边界条件-指定位移为某个线性函数。
- 当域内节点上的位移值和指定位移之间的误差为机器误差量级时，说明通过分片检验。

板弯曲问题的有限元

参考文献(reference):

1. J.N.Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition, Taylor & Francis, Philadelphia, PA, 2007
2. J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill, NY, 2006.
3. J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Lecture Notes, Chapter 3. https://mechanics.tamu.edu/an-introduction-to-the-finite-element-method/
4. J.N.Reddy, Lectures on Beams, Plates, and Shells, Lecture Notes, Chapter 3. https://mechanics.tamu.edu/lectures-on-beams-plates-and-shells/
5. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics, Sixth edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
6. 任晓丹，有限元讲义
7. 朱伯芳，有限单元法原理与应用(第二版)

A plate is a structural element with planform dimensions that are large compared to its thickness and is subjected to loads that cause bending deformation in addition to stretching(板是平面内尺寸远大于厚度，并且受力后产生弯曲和伸展变形的结构构件)。

常用的板理论包括: 1)薄板(thin plate)，也叫经典板(Classsic Plate Theory, CPT)，用Kirchhoff板理论描述; 2)厚板，也叫剪切板，其中一阶剪切板用Mindlin板理论描述。

经典板

经典板理论可以看做是Euler-Bernoulli梁理论的扩展，是基于**Kirchhoff假定(Kirchhoff hypothesis)**的:

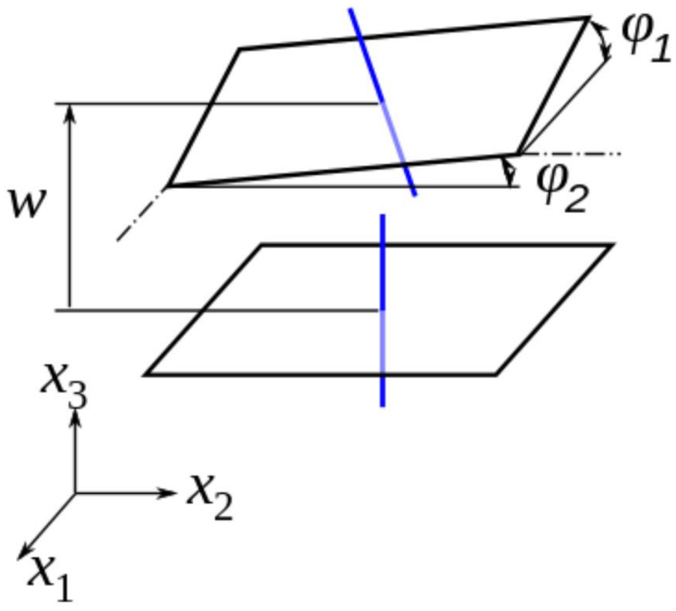
1. 变形前垂直于中性面的直线变形后继续保持为直线；
2. 变形前垂直于中性面的直线变形后继续垂直于中性面；
3. 垂直于中性面的直线没有伸长和缩短。

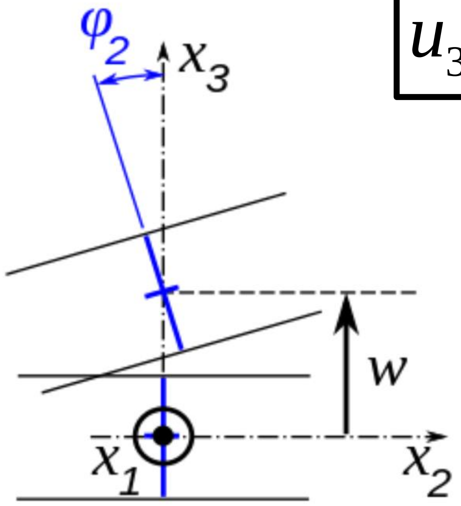
薄板的位移

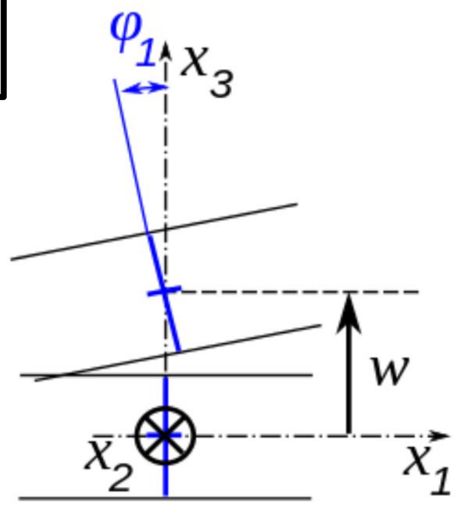
φ_1 (φ_x)以$y(x_2)$轴正方向为正；
φ_2 (φ_y)以$x(x_1)$轴负方向为正。

$$\boxed{\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}}$$

$$\boxed{u_3 = w}$$







$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 + x_3\phi_x = u_1^0 - x_3\frac{\partial w}{\partial x} = u_1^0 - w_{,1} \\ u_2 &= u_2^0 + x_3\phi_y = u_2^0 - x_3\frac{\partial w}{\partial y} = u_1^0 - w_{,2} \end{aligned}}$$

薄板的应变

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 w_{,11} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - x_3 w_{,22}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1}\right) - x_3 w_{,12}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) = \frac{1}{2}\left(w_{,1} - w_{,1} - x_3 \frac{\partial w_{,1}}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) = 0 \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = w_{,3} = 0$$

薄板（中性面）的变形

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{0} - x_3 w_{,ij} \qquad i, j = 1 \text{ or } 2$$

平面内变形

弯曲变形

薄膜应变
(membrane strains)

转角 $$\phi_i = -w_{,i}$$

$i=j$ 曲率
$i\neq j$ 扭率

curvatures $$\kappa_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = -w_{,ij}$$

薄板应力和内力

薄板应力：

$\sigma_{ij} \quad i, j = 1 \text{ or } 2$ 与应变分量对应

σ_{13}, σ_{23} 截面剪应力 σ_{33} 板表面压力

薄板内力：

$$\boxed{\begin{array}{ll} N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3 & \text{薄膜力} \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 & \text{弯矩、扭矩} \end{array}}$$

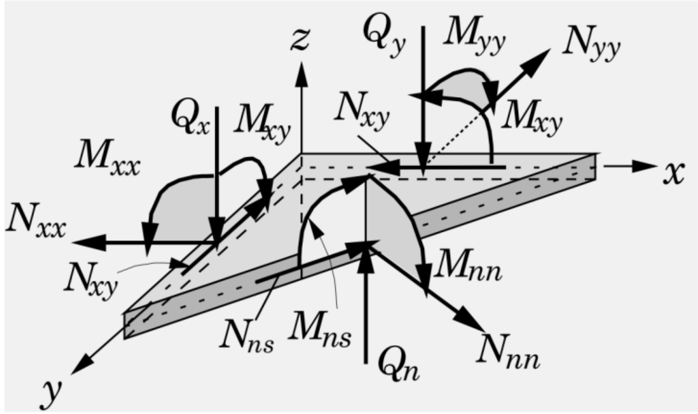
N_{11}, N_{22}, N_{12}

M_{11}, M_{22}, M_{12}

$Q_{13} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{13} dx_3 \quad Q_{23} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{23} dx_3$ 剪力

STRESS RESULTANTS

Stress resultants



$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\, dz, \quad N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}\, dz,$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\, dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz,$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}\, dz, \quad M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}\, dz,$$

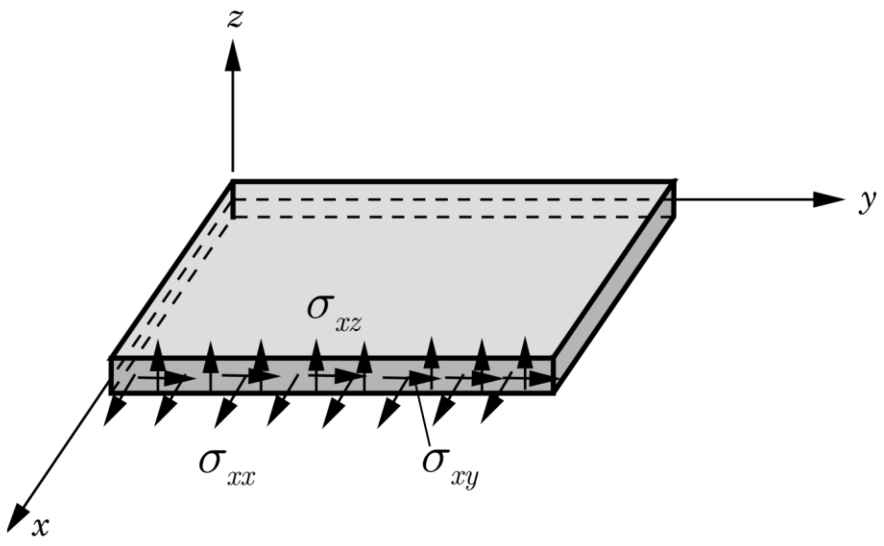
$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}\, dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}\, dz,$$

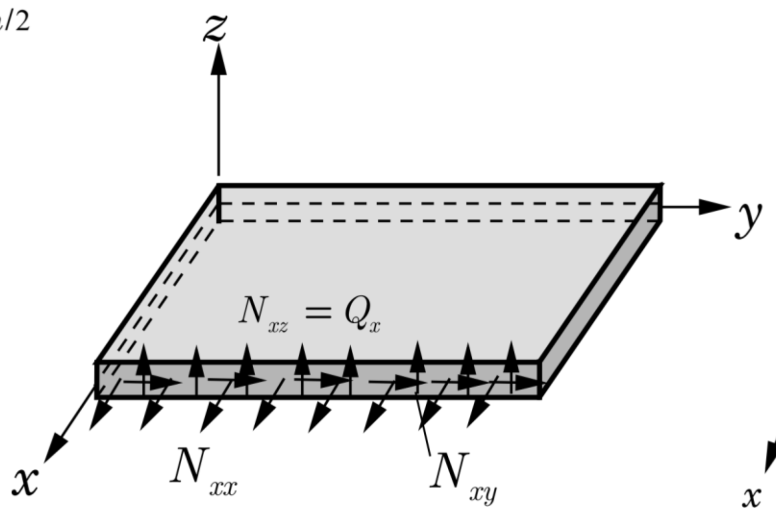
STRESSES AND STRESS RESULTANTS ON AN EDGE OF A PLATE

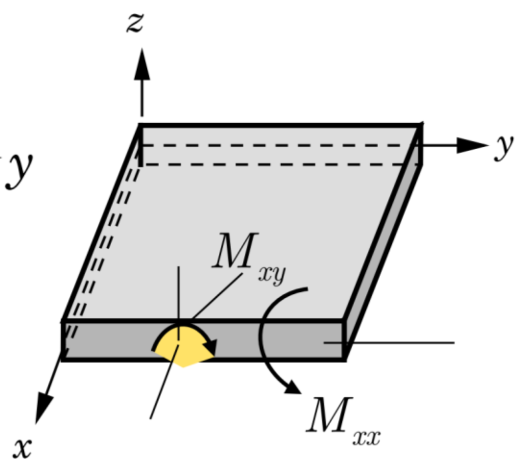
$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\, dz, \quad N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\, dz,$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz, \quad M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}\, dz,$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}\, dz$$







应力应变关系

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

γ_{12}

$$\begin{bmatrix}N_{11}\\ N_{22}\\ N_{12}\end{bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}dx_3=h\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}^0\\ \varepsilon_{22}^0\\ 2\varepsilon_{12}^0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}M_{11}\\ M_{22}\\ M_{12}\end{bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}x_3dx_3=-\int_{-h/2}^{h/2}x_3^2dx_3\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{,11}\\ w_{,22}\\ 2w_{,12}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{h^3}{12}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\kappa_{11}\\ \kappa_{22}\\ 2\kappa_{12}\end{bmatrix}$$

应力应变关系

对于薄板，由于其厚度较小，因此当做平面应力问题来考虑(忽略σ_{33})，这里的弹性系数矩阵就是平面应力问题的系数矩阵。

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix} \xRightarrow{\text{各向同性}} \begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}N_{11}\\ N_{22}\\ N_{12}\end{bmatrix}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}^0\\ \varepsilon_{22}^0\\ 2\varepsilon_{12}^0\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,11} \\ w_{,22} \\ 2w_{,12} \end{bmatrix} = D_0 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

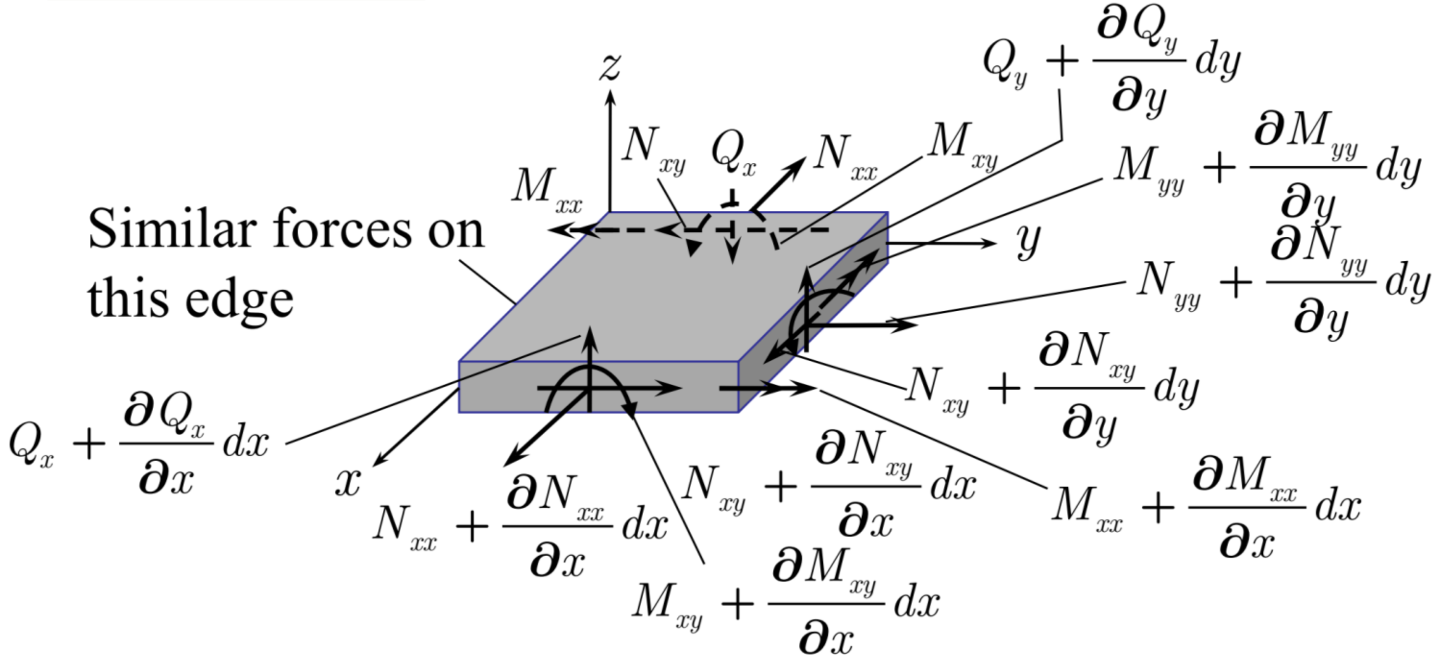
$$\boxed{\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1\text{-}\nu)/2 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, 2\kappa_{xy}\right)^T \quad \mathbf{M} = \left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)^T$$

EQUATIONS OF EQUILIBRIUM
(vector approach)

两种建立平衡方程和广义力边界条件的方法:
- 向量法;
- 虚功原理(虚位移原理)。

Element of dimensions dx, dy, and h



Equilibrium of a plate element

Equations of motion (CPT)

$$\sum F_x = 0: \ \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + f_x = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\sum F_y = 0: \ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + f_y = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

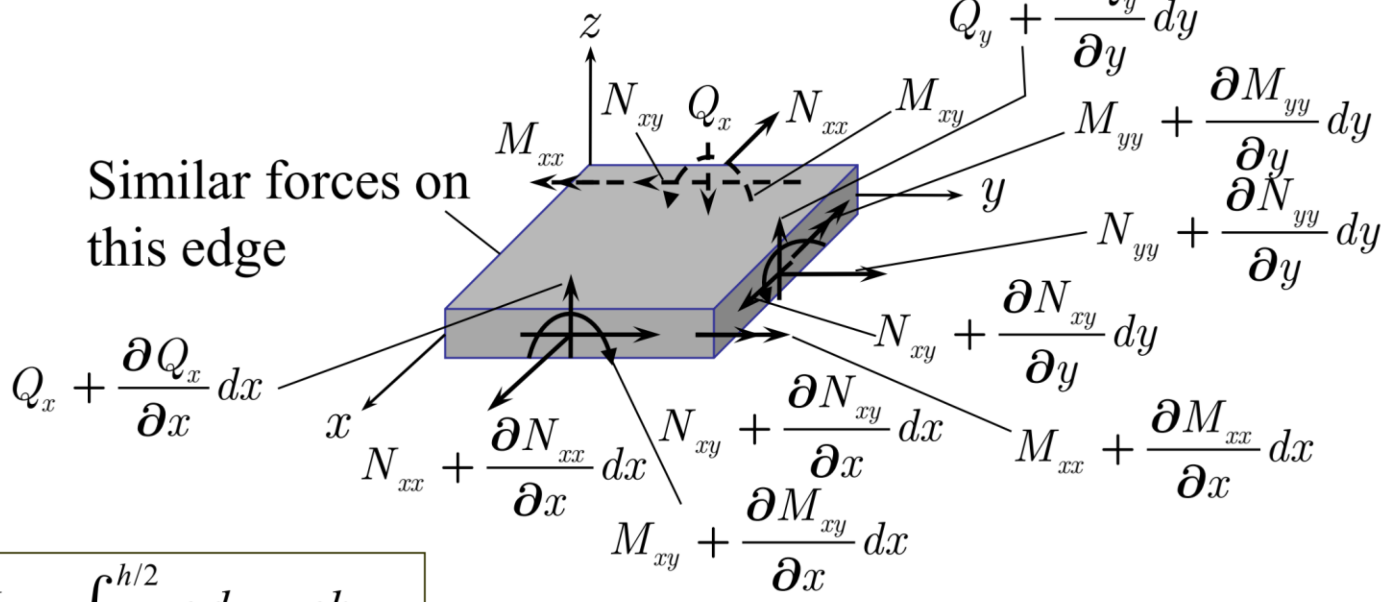
$$\sum F_z = 0: \ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\sum M_y = 0: \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}$$

绕y轴正向平衡

$$\sum M_x = 0: \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y}$$

绕x轴负向平衡



$$\boxed{\begin{aligned} I_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz = \rho h, \\ I_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz = \frac{\rho h^3}{12} \end{aligned}}$$

f_x: 单位板面积上的x方向体力;
f_y:单位板面积上的y方向体力;
q: 单位板面积上的分布力(z方向)。

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial y^2}$$

对于静力问题:

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0}$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,11} \\ w_{,22} \\ 2w_{,12} \end{bmatrix}$$

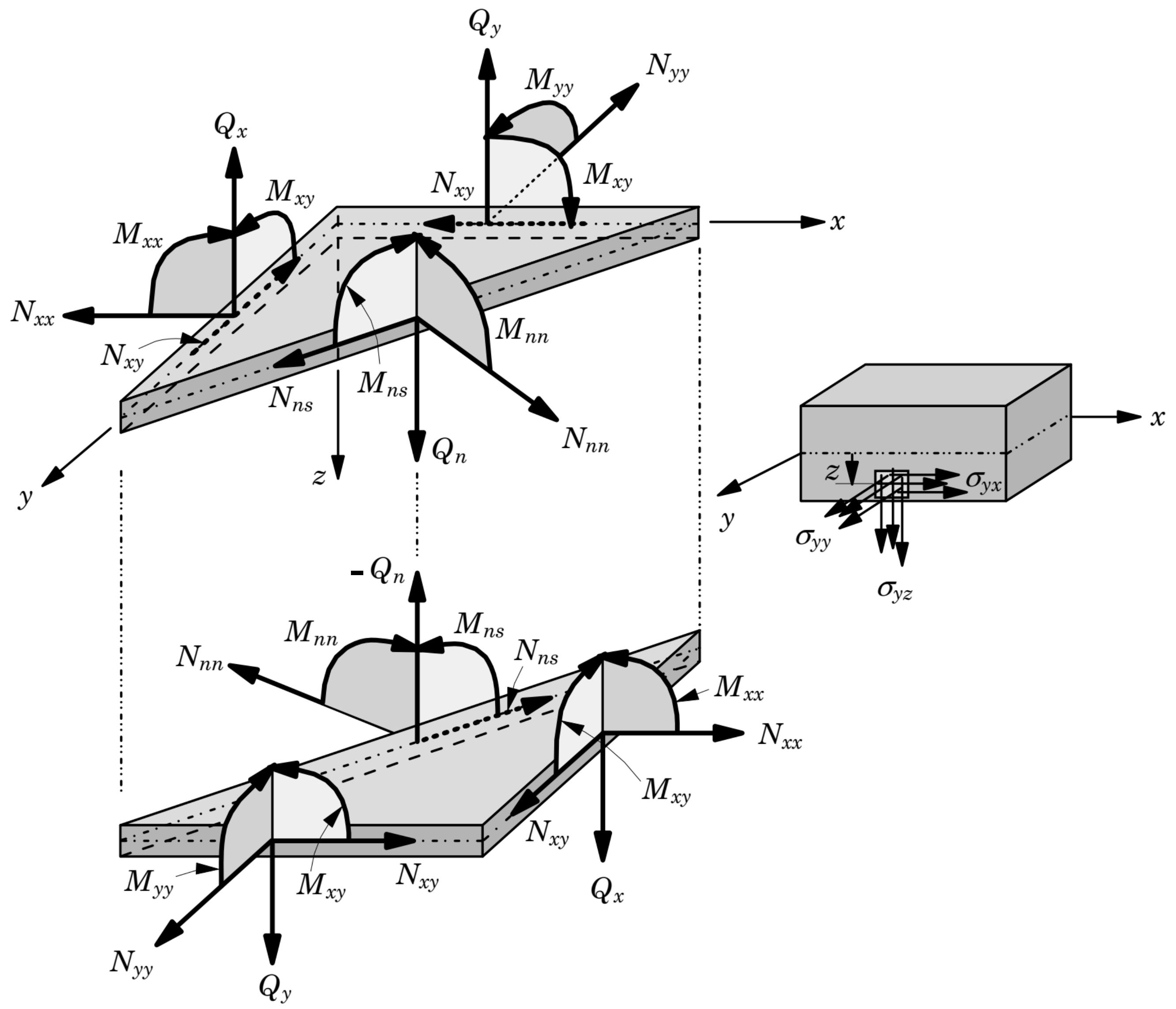
$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Kirchhoff板弯曲问题的平衡方程

Laplace算子 $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

双调和算子 $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2$



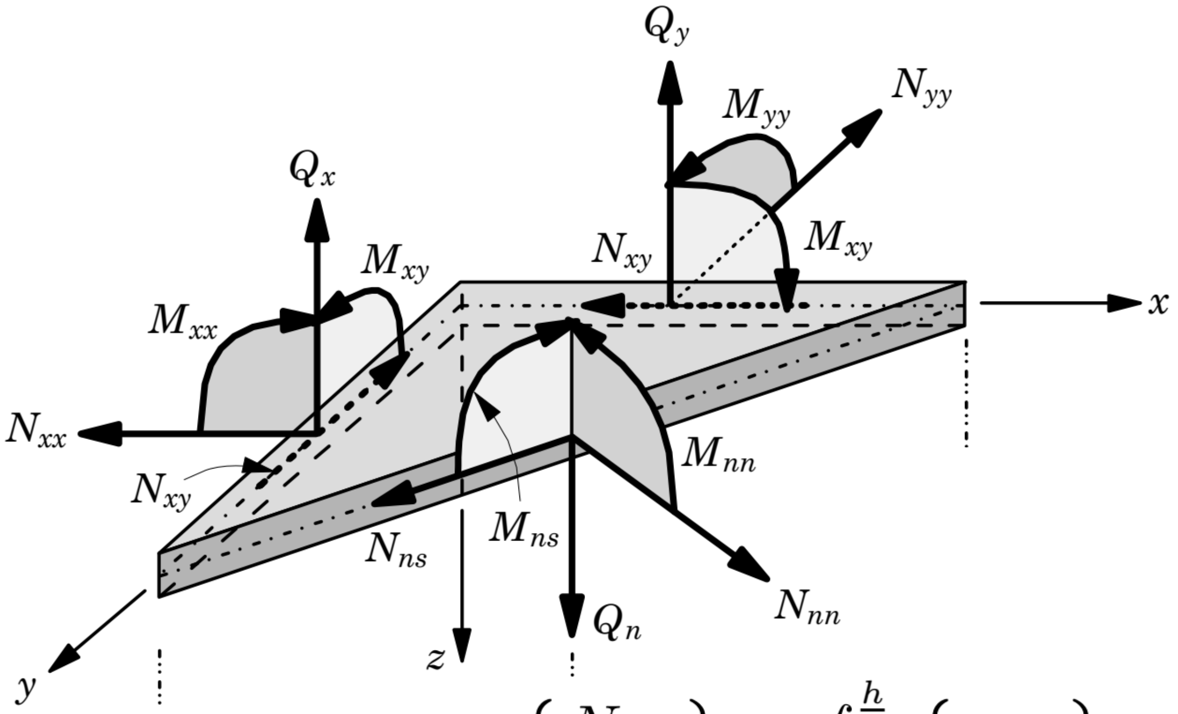
在斜面上，N_{nn}以外法线方向为正；Q_n以z轴正向为正，M_{nn}以斜面上z坐标最大处的应力产生的弯矩为正；给定s方向(切向)后，N_{ns}(以及切应力)以切向为正，M_{ns}以切应力在z最大处产生的弯矩为正向。

斜面上法向和切向的单位向量:

$$\vec{\mathbf{n}} = \left(n_x, n_y\right); \ \vec{\mathbf{s}} = \left(-n_y, n_x\right)$$

$$u_n = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = u n_x + v n_y$$

$$u_s = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = -u n_y + v n_x$$



在斜面上，N_{nn}以外法线方向为正；Q_n以z轴正向为正， M_{nn}以斜面上z坐标最大处的应力产生的弯矩为正；给定s方向(切向)后， N_{ns}(以及切应力)以切向为正， M_{ns}以切应力在z最大处产生的弯矩为正向。

$$\begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} dz \qquad Q_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{nz}\, dz \qquad {}^{dx}\!/_{ds} = n_y, {}^{dy}\!/_{ds} = n_x$$

$$\sum F_x = 0: N_{nn}n_x ds - N_{ns}n_y ds = N_{xx}dy + N_{xy}dx$$

$$\sum F_y = 0: N_{nn}n_y ds + N_{ns}n_x ds = N_{yy}dx + N_{xy}dy$$

$$\sum F_z = 0: Q_n ds = Q_x dy + Q_y dx$$

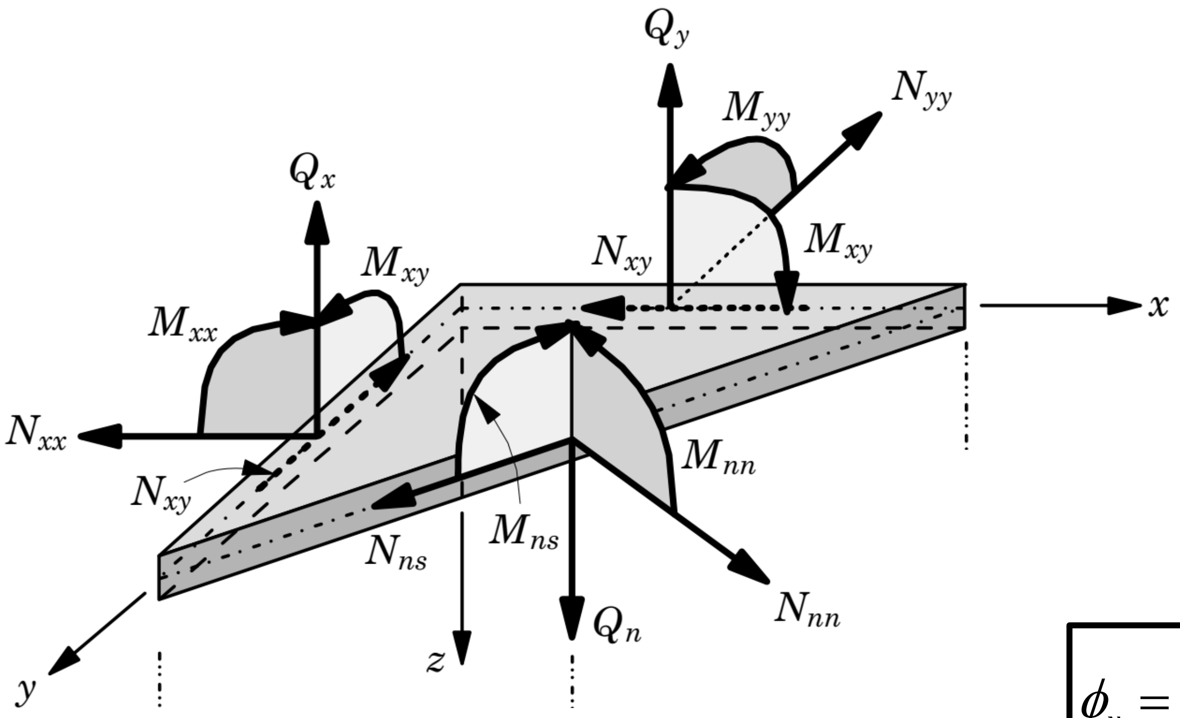
$$N_{nn}n_x - N_{ns}n_y = N_{xx}n_x + N_{xy}n_y$$

$$N_{nn}n_y + N_{ns}n_x = N_{yy}n_y + N_{xy}n_x$$

$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

也可以从内力的定义和斜面上应力的公式得出。



Φ_x指向y轴正向；
Φ_y指向x轴负向；
Φ_n指向s轴正向；
Φ_s指向n轴负向；
M_{nn}指向s轴正向；
M_{ns}指向n轴负向；

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\phi_n = -\frac{\partial w}{\partial n}, \phi_s = -\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$\vec{\mathbf{n}} = (n_x, n_y);\ \vec{\mathbf{s}} = (-n_y, n_x)$$

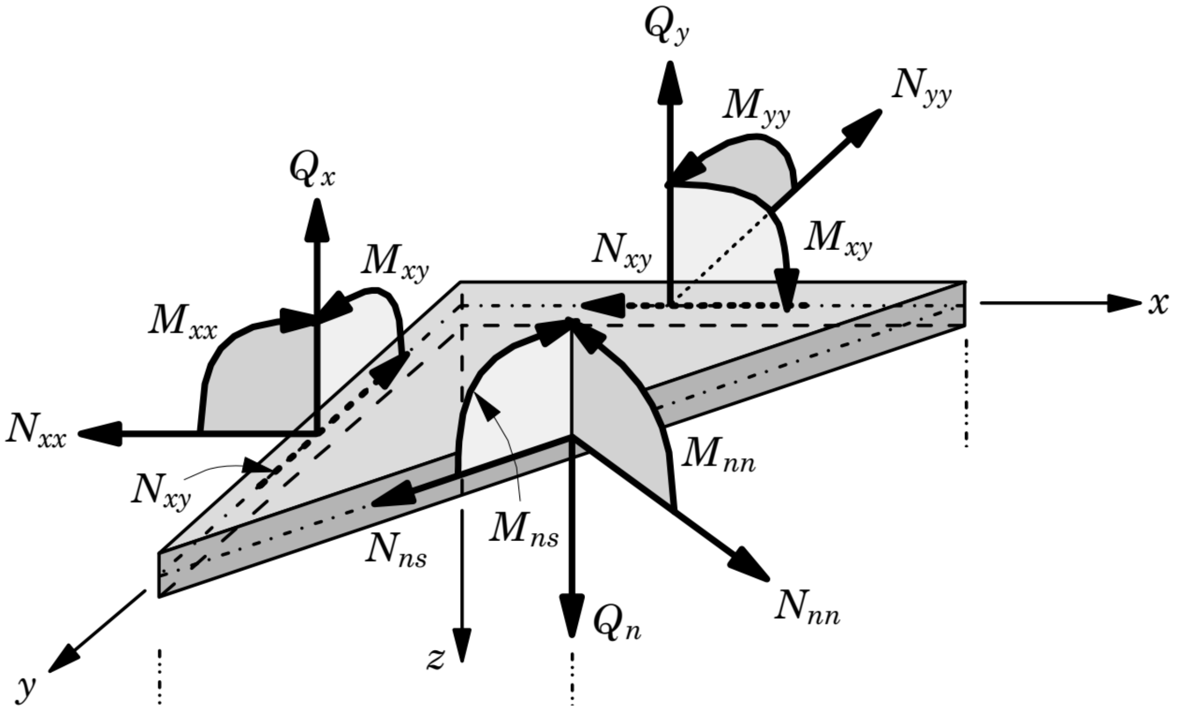
$$n = xn_x + yn_y$$

$$n = -xn_y + yn_x$$

$$\phi_n = -\frac{\partial w}{\partial n} = -\frac{\partial w}{\partial x}n_x - \frac{\partial w}{\partial y}n_y = \phi_x n_x + \phi_y n_y$$

$$\phi_s = -\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}n_y - \frac{\partial w}{\partial y}n_x = -\phi_x n_y + \phi_y n_x$$

这两个公式也可以从(微小)转角向量的不同坐标系转换关系得到。



$\varPhi_x$指向y轴正向；
$\varPhi_y$指向x轴负向；
$\varPhi_n$指向s轴正向；
$\varPhi_s$指向n轴负向；
M_{nn}指向s轴正向；
M_{ns}指向n轴负向；

$$\vec{\mathbf{n}} = (n_x, n_y);\ \vec{\mathbf{s}} = (-n_y, n_x)$$

$$\left\{ \begin{matrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{matrix} \right\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ns} \end{matrix} \right\} z\ dz$$

$$dx/ds = n_y,\ dy/ds = n_x$$

$$n = xn_x + yn_y$$

$$n = -xn_y + yn_x$$

$$\sum M_y = 0: M_{nn}n_x ds - M_{ns}n_y ds = M_{xx}dy + M_{xy}dx$$

$$\sum M_x = 0: M_{nn}n_y ds + M_{ns}n_x ds = M_{yy}dx + M_{xy}dy$$

$$M_{nn}n_x - M_{ns}n_y = M_{xx}n_x + M_{xy}n_y$$

$$M_{nn}n_y + N_{ns}n_x = M_{yy}n_y + M_{xy}n_x$$

这两个公式也可以从内力的定义和斜面上应力的公式得出。

Equations of motion

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+f_x=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+f_y=I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=I_2\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\phi_x=-\frac{\partial w}{\partial x},\phi_y=-\frac{\partial w}{\partial y}}$$

Weak forms

$v_1=\delta u,\ v_2=\delta v,\ v_3=\delta w,\ v_4=\delta\phi_x,\ v_5=\delta\phi_y$

$$0=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}N_{xx}+\frac{\partial\delta u}{\partial y}N_{xy}+I_0\delta u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dxdy-\left[\int_{\Gamma_e}\delta u\left(N_{xx}n_x+N_{xy}n_y\right)ds+\int_{\Omega_e}f_x\delta u d\Omega\right]$$

$$0=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\delta v}{\partial x}N_{xy}+\frac{\partial\delta v}{\partial y}N_{yy}+I_0\delta v\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)dxdy-\left[\int_{\Gamma_e}\delta v\left(N_{nn}n_y+N_{ns}n_x\right)ds+\int_{\Omega_e}f_y\delta v d\Omega\right]$$

$$0=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}Q_x+\frac{\partial\delta w}{\partial y}Q_y-\delta wq+I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)dxdy-\int_{\Gamma_e}\delta w\left(Q_xn_x+Q_yn_y\right)ds$$

$$0=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}M_{xy}+Q_x\delta\phi_x+I_2\delta\phi_x\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}\right)dxdy-\int_{\Gamma_e}\delta\phi_x\left(M_{xx}n_x+M_{xy}n_y\right)ds$$

$$0=\int_{\Omega_e}\left(\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}M_{xy}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+Q_y\delta\phi_y+I_2\delta\phi_y\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\right)dxdy-\int_{\Gamma_e}\delta\phi_y\left(M_{xy}n_x+M_{yy}n_y\right)ds$$

$$\int_{\Gamma_e} \delta u \left(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y \right) ds = \int_{\Gamma_e} \delta u \left(N_{nn} n_x - N_{ns} n_y \right) ds$$

$$\int_{\Gamma_e} \delta v \left(N_{yy} n_y + N_{xy} n_x \right) ds = \int_{\Gamma_e} \delta v \left(N_{nn} n_y + N_{ns} n_x \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_e} \delta u \left(N_{xx} n_x + N_{xy} n_y \right) ds + \int_{\Gamma_e} \delta v \left(N_{yy} n_y + N_{xy} n_x \right) ds \\
&= \int_{\Gamma_e} N_{nn} \left(\delta u n_x + \delta v n_y \right) ds + \int_{\Gamma_e} N_{ns} \left(-\delta u n_y + \delta v n_x \right) ds \\
&= \int_{\Gamma_e} N_{nn} \delta u_n ds + \int_{\Gamma_e} N_{ns} \delta u_s ds
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_e} \delta\phi_x \left(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \right) ds = \int_{\Gamma_e} \delta\phi_x \left(M_{nn} n_x - M_{ns} n_y \right) ds$$

$$\int_{\Gamma_e} \delta\phi_y \left(M_{yy} n_y + M_{xy} n_x \right) ds = \int_{\Gamma_e} \delta\phi_y \left(M_{nn} n_y + M_{ns} n_x \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_e} \delta\phi_x \left(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \right) ds + \int_{\Gamma_e} \delta\phi_y \left(M_{yy} n_y + M_{xy} n_x \right) ds \\
&= \int_{\Gamma_e} M_{nn} \left(\delta\phi_x n_x + \delta\phi_y n_y \right) ds + \int_{\Gamma_e} M_{ns} \left(-\delta\phi_x n_y + \delta\phi_y n_x \right) ds \\
&= \int_{\Gamma_e} M_{nn} \delta\phi_n ds + \int_{\Gamma_e} M_{ns} \delta\phi_s ds
\end{aligned}$$

动力问题虚功方程(弱形式)

将前述5个方程的弱形式(weak form)相加，并将边界力相关的项替换后，得到如下动力问题的弱形式，即虚功方程:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial\delta u}{\partial x}N_{xx}+\frac{\partial\delta v}{\partial y}N_{yy}+\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)N_{xy}+I_0\delta u\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_0\delta v\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\right.\\
&\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)M_{xy}+\\
&\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\phi_x\right)Q_x+\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\phi_y\right)Q_y+\\
&\left.I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_x\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_y\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\right]d\Omega=\\
&\int_{\Gamma_e}\left(N_{nn}\delta u_n+N_{ns}\delta u_s+M_{nn}\delta\phi_n+M_{ns}\delta\phi_s+Q_n\delta w\right)ds+\int_{\Omega_e}\left(q\delta w+f_x\delta u+f_y\delta v\right)d\Omega
\end{aligned}
$$

静力问题虚功方程（弱形式）

忽略时间相关的项，得到如下静力问题的弱形式，即虚功方程:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial\delta u}{\partial x}N_{xx}+\frac{\partial\delta v}{\partial y}N_{yy}+\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)N_{xy}+\right.\\
&\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)M_{xy}+\\
&\left.\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\phi_x\right)Q_x+\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\phi_y\right)Q_y\right]d\Omega=\\
&\int_{\Gamma_e}\left(N_{nn}\delta u_n+N_{ns}\delta u_s+M_{nn}\delta\phi_n+M_{ns}\delta\phi_s+Q_n\delta w\right)ds+\int_{\Omega_e}\left(q\delta w+f_x\delta u+f_y\delta v\right)d\Omega
\end{aligned}
$$

板弯曲问题虚功方程的另一种推导方式-从三维弹性力学问题的虚功原理出发推导

$$0=\delta W^e \equiv \delta W_I^e+\delta W_E^e$$

$$\delta W_I^e=\int_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,dV$$

$$=\int_V\left(\sigma_{11}\,\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\,\delta\varepsilon_{22}+\sigma_{12}\,2\delta\varepsilon_{12}+\sigma_{13}\,2\delta\varepsilon_{13}+\sigma_{23}\,2\delta\varepsilon_{23}\right)dV$$

$$=\int_\Omega\left\{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_{xx}\left(\delta\varepsilon_{xx}^0+z\delta\varepsilon_{xx}^1\right)+\sigma_{yy}\left(\delta\varepsilon_{yy}^0+z\delta\varepsilon_{yy}^1\right)\right.\right.$$

$$+\sigma_{xy}\left(\delta\gamma_{xy}^0+z\delta\gamma_{xy}^1\right)+K_s\sigma_{xz}\delta\gamma_{xz}^0$$

$$\left.\left.+K_s\sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}^0\right]dz\right\}dxdy$$

$$\delta W_E^e=-\left\{\oint_\Gamma\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\sigma_{nn}\left(\delta u_n+z\delta\phi_n\right)+\sigma_{ns}\left(\delta u_s+z\delta\phi_s\right)+\sigma_{nz}\delta w\right]dzds\right.$$

$$\left.+\int_\Omega q\,\delta w\,dxdy\right\}$$

PRINCIPLE OF VIRTUAL DISPLACEMENTS

$$0=\int_{\Omega}\Bigg[N_{xx}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+M_{xx}\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}+N_{yy}\frac{\partial\delta v}{\partial y}+M_{yy}\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}+N_{xy}\left(\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial\delta v}{\partial x}\right)$$

$$+M_{xy}\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)+Q_x\left(\delta\phi_x+\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)+Q_y\left(\delta\phi_y+\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)\Bigg]dxdy$$

$$-\int_{\Omega}(f_x\delta u+f_y\delta v+q\delta w)\,dxdy-\oint_{\Gamma}\left(N_{nn}\delta u_n+N_{ns}\delta u_s+M_{nn}\delta\phi_n+M_{ns}\delta\phi_s+Q_n\delta w\right)ds$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+f_x=0,\quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+f_y=0,$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0,\quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0$$

通过虚功方程
建立平衡方程

当应变取线性应变、本构为各向异性时，薄板的薄膜变形和弯曲变形可以解耦合独立计算，这里只考虑板的弯曲变形问题。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_e}\left[\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)M_{xy}\right.\\
&\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\phi_x\right)Q_x+\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\phi_y\right)Q_y+\\
&\left.I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_x\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_y\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\right]d\Omega=\\
&\int_{\Gamma_e}\left(M_{nn}\delta\phi_n+M_{ns}\delta\phi_s+Q_n\delta w\right)ds+\int_{\Omega_e}q\delta w d\Omega
\end{aligned}
$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = -w_{,ij}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

$$\mathbf{D} = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)^T$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, 2\kappa_{xy}\right)^T$$

将本构关系和几何关系带入上面式子并整理后得到:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Omega_e}\Big[\delta\kappa_{xx}M_{xx} + \delta\kappa_{yy}M_{yy} + 2\delta\kappa_{xy}M_{xy} \\ &I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2\delta\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + I_2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\Big]d\Omega = \\ &\int_{\Gamma_e}\left(-M_{nn}\frac{\partial \delta w}{\partial n} - M_{ns}\frac{\partial \delta w}{\partial s} + Q_n\delta w\right)ds + \int_{\Omega_e} q\delta w d\Omega\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Omega_e}\left(\delta\boldsymbol{\kappa}^T\mathbf{M} + I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2\frac{\partial \delta w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} + I_2\frac{\partial \delta w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\right)d\Omega = \\ &\int_{\Gamma_e}\left(-M_{nn}\frac{\partial \delta w}{\partial n} - M_{ns}\frac{\partial \delta w}{\partial s} + Q_n\delta w\right)ds + \int_{\Omega_e} q\delta w d\Omega\end{aligned}}$$

边界条件

$$\int_\Gamma \left(M_{nn}\delta\phi_n + M_{ns}\delta\phi_s + Q_n\delta w\right)ds = \int_\Gamma \left(-M_{nn}\frac{\partial\delta w}{\partial n} - M_{ns}\frac{\partial\delta w}{\partial s} + Q_n\delta w\right)ds$$

$$\int_\Gamma \left(-M_{ns}\frac{\partial w}{\partial s} + Q_n\delta w\right)ds = \int_\Gamma \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n\right)\delta w ds - M_{ns}\delta w\Big|_{x_a}^{x_b}$$

$$\delta W = \int_{C_3}\delta w\bar{q}ds - \int_{C_2+C_3}\frac{\partial\delta w}{\partial n}\bar{M}_{nn}ds + \int_{\Omega_e} q\delta w d\Omega$$

x_a和x_b是Γ的两个端点，一般有支座，因此δw=0。

$$w = \bar{w},\ Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \bar{q}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\phi},\ M_{nn} = \bar{M}_{nn}$$

三种典型边界条件:

1. 固支(clamped)边界C_1: $w = \bar{w},\ \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\phi}$
2. 简支(simply supported)边界C_2: $w = \bar{w},\ M_{nn} = \bar{M}_{nn}$
3. 自由(free)边界C_3: $Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \bar{q},\ M_{nn} = \bar{M}_{nn}$

Kirchhoff板动力弯曲问题的虚功方程(弱形式)

将边界条件用三类边界上的相应项替换后，得到虚功方程为:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Omega_e}\left(\delta\boldsymbol{\kappa}^T\mathbf{M}+I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial\delta w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2}+I_2\frac{\partial\delta w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2}\right)d\Omega=\\&\int_{C_3}\delta w\bar{q}ds-\int_{C_2+C_3}\frac{\partial\delta w}{\partial n}\bar{M}_{nn}ds+\int_{\Omega_e}q\delta wd\Omega\end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\kappa}=\left(\kappa_{xx},\kappa_{yy},2\kappa_{xy}\right)^T$$

$$\kappa_{ij}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}=-w_{,ij}$$

$$\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{L}_2 w$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

将弯曲本构方程带入并将各项写成矩阵形式:

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\Omega}\left[I_0\delta w^T\ddot{w}+I_2\left(\mathbf{L}_1\delta w\right)^T\mathbf{L}_1\ddot{w}+\left(\mathbf{L}_2\delta w\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}_2\delta w\right)\right]d\Omega=\\&\int_{\Omega}\delta w^T qd\Omega+\int_{C_2+C_3}\frac{\partial\delta w}{\partial n}\bar{M}_{nn}ds+\int_{C_3}\delta w^T\bar{q}ds\end{aligned}}$$

$$\mathbf{L}_1=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{L}_2=-\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\\[2mm]\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\[2mm]\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

Kirchhoff板静力弯曲问题的虚功方程(弱形式)

对于静力问题，忽略时间导数相关项，其虚功方程为:

$$\boxed{\int_{\Omega_e} \delta\boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} d\Omega = \int_{C_3} \delta w \bar{q} ds - \int_{C_2+C_3} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{\Omega_e} q \delta w d\Omega}$$

$$\mathbf{D} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\delta U = \delta W}$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{M} d\Omega$$

$$\kappa_{ij} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = -w_{,ij}$$

$$\mathbf{M} = \left(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\right)^T$$

$$U = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} d\Omega$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \left(\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, 2\kappa_{xy}\right)^T$$

$$W = \int_{C_3} w \bar{q} ds - \int_{C_2+C_3} \frac{\partial w}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{\Omega} w q d\Omega$$

Kirchhoff板动力弯曲问题的有限元

- 未知量(primary variable)为挠度w。
- 势能和弱形式中出现w的最高阶导数为2阶，因此协调元(conforming element)需要C_1连续(一阶导数连续)。
- 一阶Hermite插值可以满足C_1连续性，但是Hermite插值只能在矩形单元上建立，无法适应复杂形状求解域。双一阶Hermite单元也叫做BFS单元。
- 某些非协调单元可以用于求解薄板弯曲问题，但是这些单元一般只在特定形状的网格上才可以得到收敛的结果。

Kirchhoff板动力弯曲问题的有限元格式

$$w = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \qquad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}_2 w = \mathbf{L}_2\mathbf{N}\mathbf{u}^e = \mathbf{B}\mathbf{u}^e \qquad \mathbf{M} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{u}^e$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_\Omega \left[I_0 \delta w^T \ddot{w} + I_2 \left(\mathbf{L}_1 \delta w\right)^T \mathbf{L}_1 \ddot{w} + \delta w^T \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} w \right] d\Omega = \\ &\int_\Omega \delta w^T q \, d\Omega + \int_{C_2 + C_3} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{C_3} \delta w^T \bar{q} \, ds\end{aligned}}$$

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{M}_{we} = \int_{\Omega_e} \left[I_0 \mathbf{N}^T \mathbf{D}\mathbf{N} + I_2 \left(\mathbf{L}_1 \mathbf{N}\right)^T \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N} \right] d\Omega, \ \mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} \, d\Omega$$

$$\mathbf{P}_e = \int_{C_{3e}} \mathbf{N}^T \bar{q} \, ds - \int_{C_{2e}+C_{3e}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T q \, d\Omega \qquad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} n_y$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_e, \ \mathbf{P} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{n_e} \mathbf{P}_e$$

Kirchhoff板静力弯曲问题的有限元格式

将时间导数相关项删除后得到静力问题的有限元格式:

$$\boxed{\int_{\Omega} \delta w^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} w d\Omega = \int_{\Omega} \delta w^T q d\Omega + \int_{C_2+C_3} \frac{\partial \delta w}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{C_3} \delta w^T \bar{q} ds}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P}$$

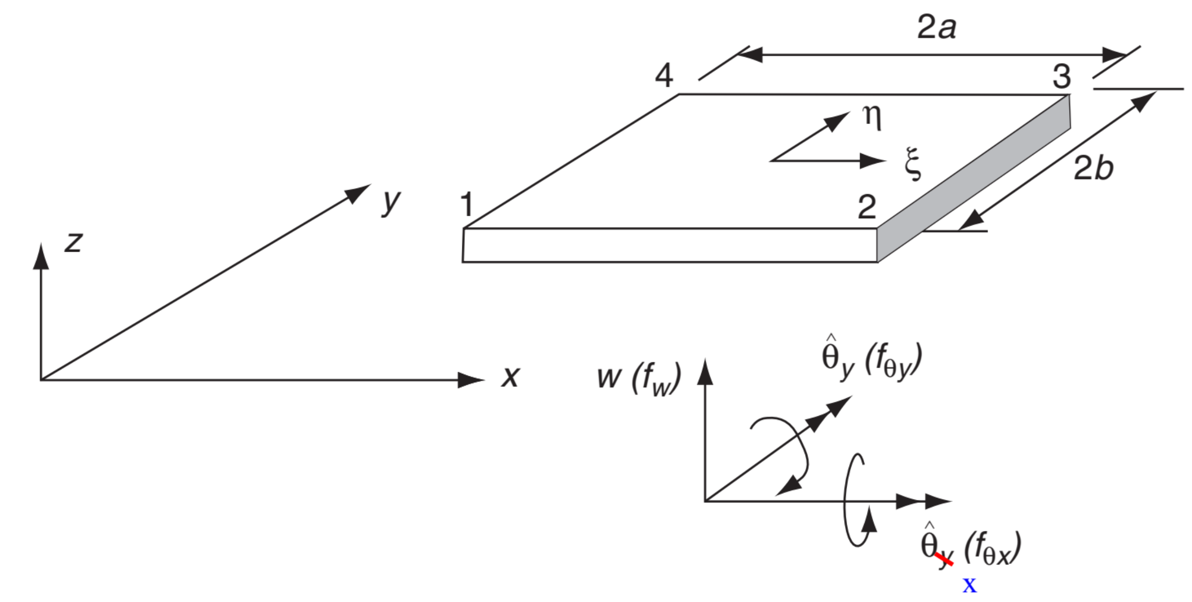
$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega$$

$$\mathbf{P}_e = \int_{C_{3e}} \mathbf{N}^T \bar{q} ds - \int_{C_{2e}+C_{3e}} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial n} \bar{M}_{nn} ds + \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T q d\Omega \qquad \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} n_y$$

$$\mathbf{K} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_e} \mathbf{K}_e, \ \mathbf{P} = \mathop{\mathbf{A}}_{e=1}^{n_e} \mathbf{P}_e$$

矩形薄板单元

Rectangular element with corner nodes (12 degrees of freedom)



$$\tilde{\mathbf{u}}^{e} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_1 \\ \tilde{\mathbf{u}}_2 \\ \tilde{\mathbf{u}}_3 \\ \tilde{\mathbf{u}}_4 \end{Bmatrix} \quad \text{with} \quad \tilde{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_a \\ \tilde{\theta}_{xa} \\ \tilde{\theta}_{ya} \end{Bmatrix}$$

A rectangular plate element.

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y \\ &\quad + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \\ &\equiv \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

矩形薄板单元

$$\mathbf{P}(x_a, y_a)\boldsymbol{\alpha} = w_a$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}\Big|_{(x_a,\,y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{xa}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}\Big|_{(x_a,\,y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{ya}$$

得到12个方程，求解得到: $w = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$

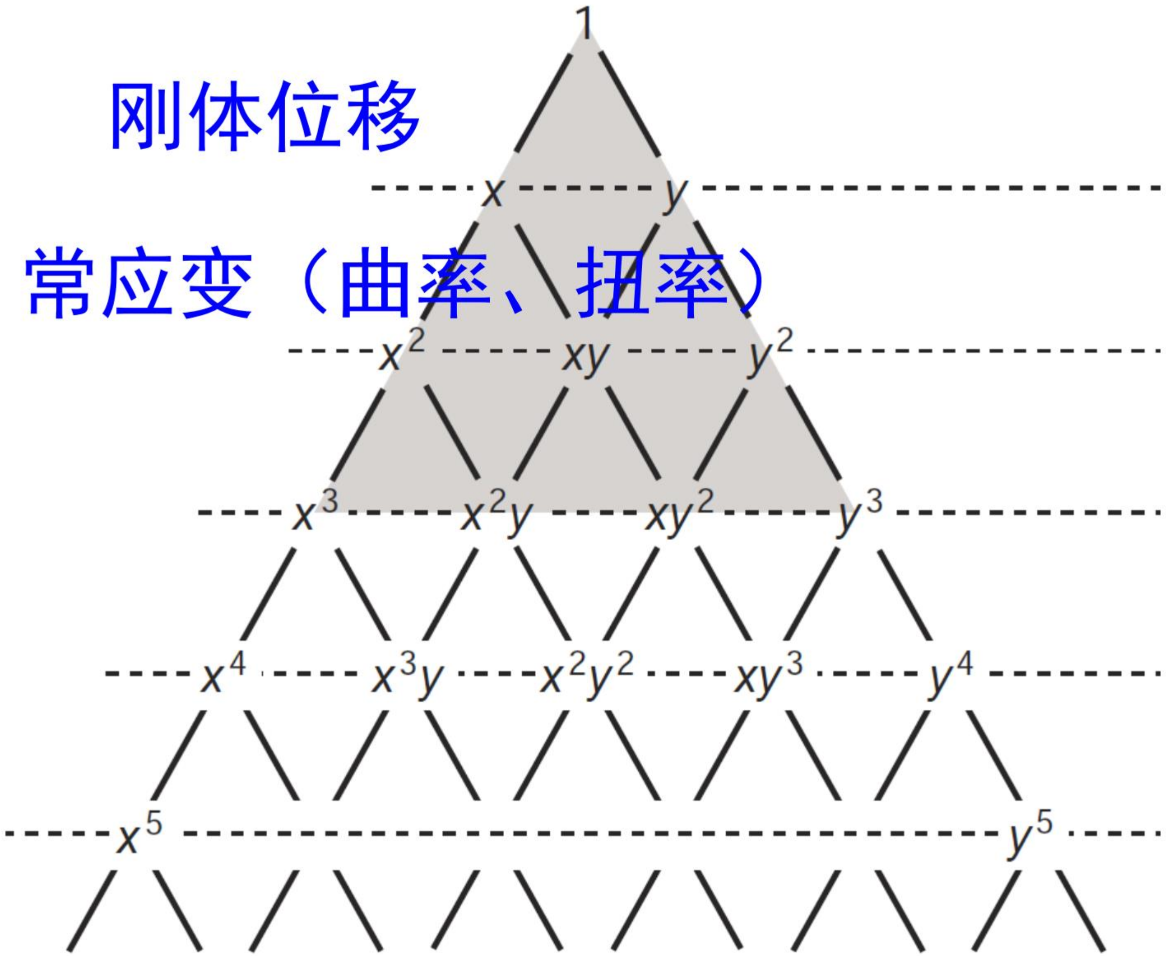
$$\mathbf{N}_a^{\mathrm{T}} = \tfrac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)\begin{Bmatrix} 2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2 \\ b\eta_a(1-\eta^2) \\ -a\xi_a(1-\xi^2) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad \text{where} \quad \xi_0 = \xi\xi_a$$

$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \quad \text{where} \quad \eta_0 = \eta\eta_a$$

矩形薄板单元

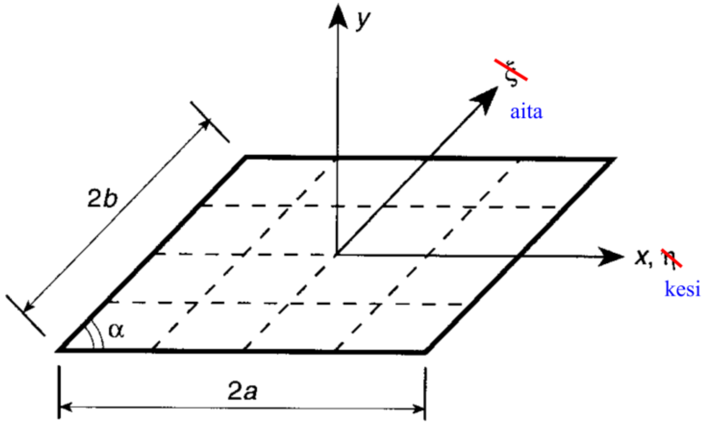


满足完备性要求

矩形薄板单元

- 非协调元，两个单元公共边上一阶偏导数不连续。
- 无法推广到任意形状四边形网格。
- 可以推广到平行四边形网格。

$$\xi = \frac{x - y\cot\alpha}{a}$$
$$\eta = \frac{y\csc\alpha}{b}$$



It will be observed that the gradient of w normal to any of the boundaries also varies along it in a cubic way. (Consider, for instance, values of the normal $\partial w/\partial x$ along a line on which x is constant.) As on such lines only two values of the normal slope are defined, the cubic is not specified uniquely and, in general, a discontinuity of normal slope will occur. The function is thus 'non-conforming'.

三角形薄板单元(9 DOFs)

三节点薄板单元

每个节点三个自由度，总共九个自由度。可以决定9个系数。

$$\tilde{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_a \\ \tilde{\theta}_{xa} \\ \tilde{\theta}_{ya} \end{Bmatrix}$$

面积坐标及其多项式：

一次项： L_1, L_2, L_3

一次完全多项式： $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3$

二次项： $L_1^2, L_2^2, L_3^2, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1$

二次完全多项式为一、二次项中任意6项线性组合，最常用形式：

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_3 L_1$$

三次项： $L_1^3, L_2^3, L_3^3, L_1^2 L_2, L_2^2 L_3, L_3^2 L_1, L_1 L_2^2, L_2 L_3^2, L_3 L_1^2, L_1 L_2 L_3$

三次完全多项式为一、二、三次项中任意10项线性组合，最常用形式：

$$\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_1 L_2 + \alpha_5 L_2 L_3 + \alpha_6 L_3 L_1 + \alpha_7 L_1^2 L_2 + \alpha_8 L_2^2 L_3 + \alpha_9 L_3^2 L_1 + \alpha_{10} L_1 L_2 L_3$$

三角形薄板单元(9 DOFs)

$$\mathbf{P}\left(x_a, y_a\right)\boldsymbol{\alpha} = w_a$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}\Big|_{(x_a,\, y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{xa}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}\Big|_{(x_a,\, y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{ya}$$

每个节点三个自由度，总共九个自由度。可以决定9个系数。

$$\tilde{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_a \\ \tilde{\theta}_{xa} \\ \tilde{\theta}_{ya} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} & \dfrac{\partial L_2}{\partial x} & \dfrac{\partial L_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_1}{\partial y} & \dfrac{\partial L_2}{\partial y} & \dfrac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix}$$

三角形薄板单元(9 DOFs)

$$\mathbf{P}\left(x_a, y_a\right)\boldsymbol{\alpha} = w_a$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial y}\Big|_{(x_a,\, y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{xa}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x}\Big|_{(x_a,\, y_a)}\boldsymbol{\alpha} = \theta_{ya}$$

每个节点三个自由度，总共九个自由度。可以决定9个系数。

$$\tilde{\mathbf{u}}_a = \begin{Bmatrix} \tilde{w}_a \\ \tilde{\theta}_{xa} \\ \tilde{\theta}_{ya} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} & \dfrac{\partial L_2}{\partial x} & \dfrac{\partial L_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L_1}{\partial y} & \dfrac{\partial L_2}{\partial y} & \dfrac{\partial L_3}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial L_3} \end{bmatrix}$$

三角形薄板单元(9 DOFs)

$$w = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$$

$$w=\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2+\alpha_3 L_3+\alpha_4 L_1 L_2+\alpha_5 L_2 L_3+\alpha_6 L_3 L_1+\alpha_7 L_1^2 L_2+\alpha_8 L_2^2 L_3+\alpha_9 L_3^2 L_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{N}_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 3L_i^2-2L_i^3 \\ L_i^2(b_j L_k-b_k L_j) \\ L_i^2(c_j L_k-c_k L_j) \end{bmatrix}$$

不满足常应变要求！

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}\mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} w=&\alpha_1 L_1+\alpha_2 L_2+\alpha_3 L_3 \\ &+\alpha_4\left(L_1 L_2+C L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_5\left(L_2 L_3+C L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_6\left(L_3 L_1+C L_1 L_2 L_3\right) \\ &+\alpha_7\left(L_1^2 L_2+C L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_8\left(L_2^2 L_3+C L_1 L_2 L_3\right)+\alpha_9\left(L_3^2 L_1+C L_1 L_2 L_3\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{N}_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} L_i+L_i{}^2 L_j+L_i{}^2 L_k-L_i L_j{}^2-L_i L_k{}^2 \\ L_i^2(b_j L_k-b_k L_j)+C(b_j-b_k)L_1 L_2 L_3 \\ L_i^2(c_j L_k-c_k L_j)+C(c_j-c_k)L_1 L_2 L_3 \end{bmatrix}$$

C=1/2时满足常应变要求！

这个单元由Bazeley, Cheung, Irons, Zienkiewicz四人的论文中发表，因此叫做BCIZ单元。

三角形薄板单元(9 DOFs)

$$w = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 \end{bmatrix}$$

形 函 数 性 质

	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_i}{\partial x}$	N_{xi}	$\frac{\partial N_{xi}}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_{xi}}{\partial x}$	N_{yi}	$\frac{\partial N_{yi}}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_{yi}}{\partial x}$
在结点 i	1	0	0	0	1	0	0	0	1
在结点 j, m	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(i, j, m)

- 非协调元，两个单元公共边上一阶偏导数不连续。
- 只在三组平行线组成的网格上收敛。

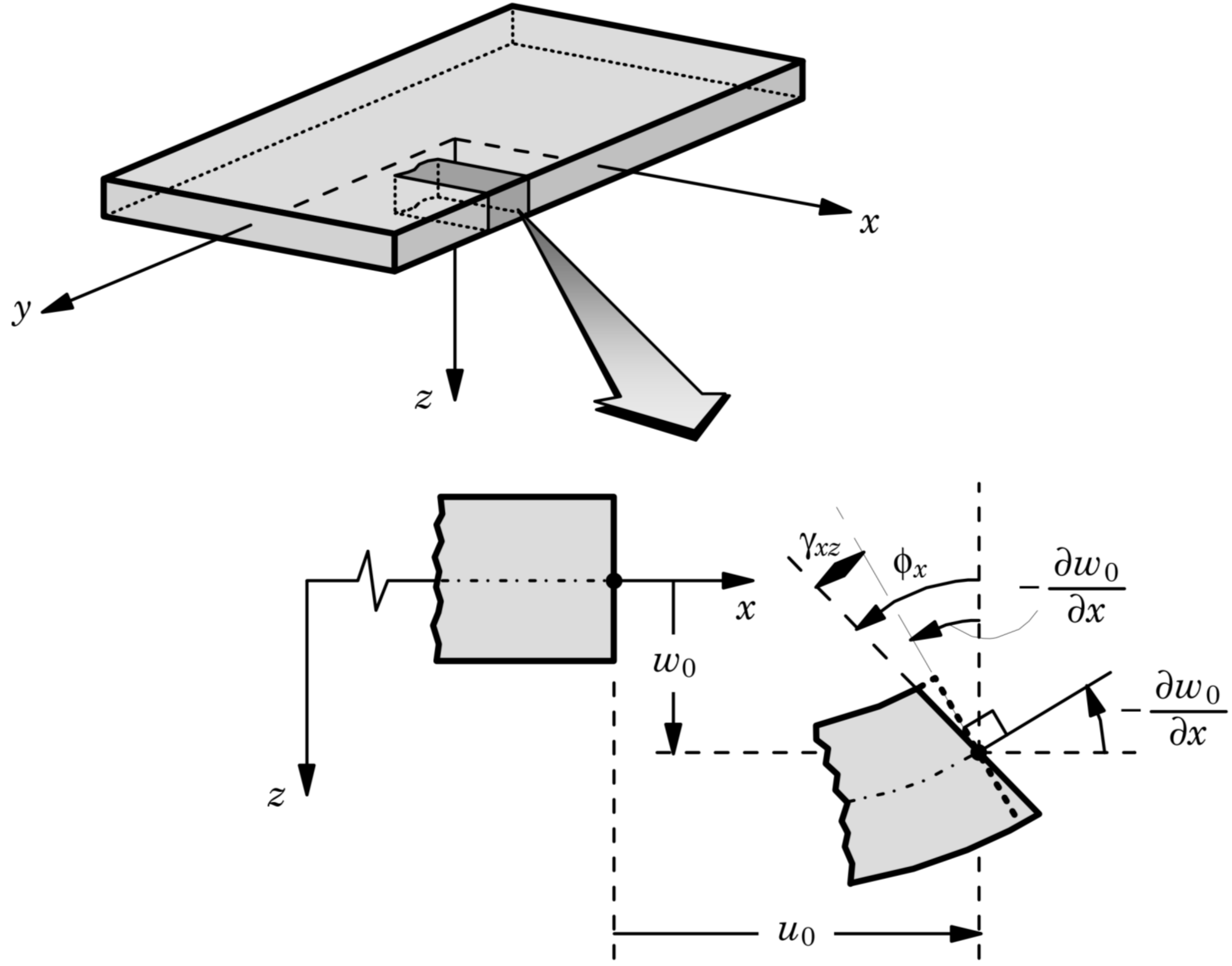
剪切板

Mindlin板/一阶剪切板(First-order shear deformation plate）：

1. 变形前垂直于中性面的直线变形后继续保持为直线。
2. 垂直于中性面的直线没有伸长和缩短。
3. 变形前垂直于中性面的直线变形后不一定垂直于中性面。

三阶阶剪切板(First-order shear deformation plate）：

1. 垂直于中性面的直线没有伸长和缩短。
2. 变形前垂直于中性面的直线变形后不一定为平面(可能为三次曲线)。
3. 变形前垂直于中性面的直线变形后不一定垂直于中性面。

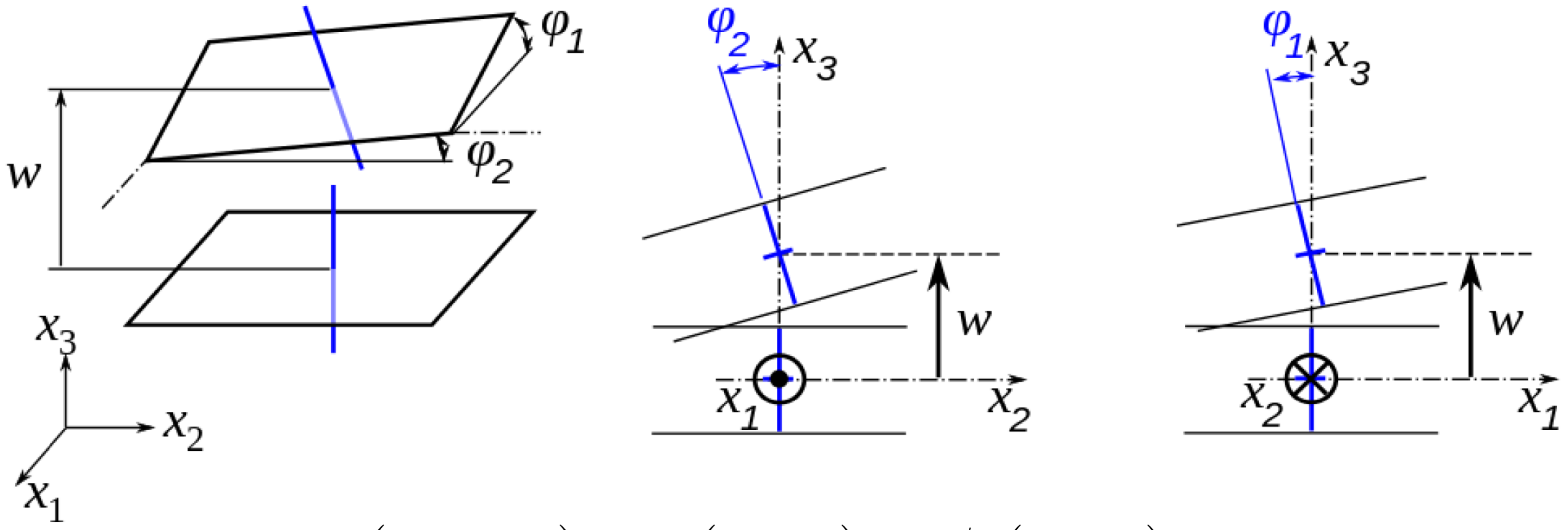


Undeformed and deformed geometries of an edge of a plate under the assumptions of the first-order shear deformation plate theory (FSDT).

The classical plate theory underpredicts deflections and overpredicts frequencies as well as buckling loads of plates with side-to-thickness ratios of the order of 20 or less (i.e., thick plates). 对厚板使用Kirchhoff板理论会低估挠度，并且高估频率和屈曲荷载。

厚板的位移

φ_1 (φ_x)以$y(x_2)$轴正方向为正;
φ_2 (φ_y)以$x(x_1)$轴负方向为正。



$$u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t)$$
$$v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t)$$
$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)$$

平面内变形　　　弯曲变形

THE FIRST-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Displacement Field

$$u_1(x,y,z,t) = u(x,y,t) + z\phi_x(x,y,t)$$
$$u_2(x,y,z,t) = v(x,y,t) + z\phi_y(x,y,t)$$
$$u_3(x,y,z,t) = w(x,y,t)$$

Linear strains

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} + z\dfrac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + z\dfrac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + z\left(\dfrac{\partial \phi_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \phi_y}{\partial x}\right) \\ \phi_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

内力的定义和薄板完全一样

Stress resultants

$$N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}\, dz, \quad N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy}\, dz,$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}\, dz, \quad Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}\, dz,$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz}\, dz, \quad M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}\, dz,$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}\, dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}\, dz, \ N$$

应力应变关系

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{32} \end{bmatrix}$$

正交各向异性弹性本构关系

Orthotropic material

正交各向异性本构关系

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} dx_3 = h \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{32} \end{bmatrix} dx_3 = k_s h \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,1} + \varphi_1 \\ w_{,2} + \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{L}_1 = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{G} = k_s h \begin{bmatrix} C_{44} & 0 \\ 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}\left(\mathbf{\Phi} + \mathbf{L}_1 w\right)$$

正交各向异性本构关系

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} x_3 dx_3 = +\frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \varphi_{1,2}+\varphi_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{DL\Phi}$$

应力应变关系

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{31}\\ \sigma_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{32}\end{bmatrix}$$

各向同性弹性本构关系
isotropic material

各向同性本构关系

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^0 \\ \varepsilon_{22}^0 \\ 2\varepsilon_{12}^0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{DL\Phi}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{G}\left(\mathbf{\Phi} + \mathbf{L}_1 w\right)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Phi} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = k_s h\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

可以使用(1)向量法(微小单元的力和力矩平衡)或者(2)虚功方程得到和薄板完全一致的运动方程(平衡方程)

Equations of motion

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+f_x=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+f_y=I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

平面内变形

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_{yy}}{\partial y}-Q_y=I_2\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$$

弯曲变形

对于一阶剪切板(Mindlin板)来说，当应变只考虑通常的线性应变、并且材料本构为正交各向异性弹性时，平面内变形和弯曲变形可以解耦合单独计算，这里我们只考虑Mindlin板的弯曲问题。

厚板动力问题虚功方程(弱形式)

厚板的虚功方程推导以及形式与薄板完全一致。虚功方程为:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Bigg[\frac{\partial \delta u}{\partial x} N_{xx} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_{yy} + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) N_{xy} + I_0 \delta u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_0 \delta v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\
&\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} M_{yy} + \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) M_{xy} + \\
&\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta \phi_x \right) Q_x + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \delta \phi_y \right) Q_y + \\
&I_0 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \delta \phi_x \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_2 \delta \phi_y \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \Bigg] d\Omega = \\
&\int_\Gamma \left(N_{nn} \delta u_n + N_{ns} \delta u_s + M_{nn} \delta \phi_n + M_{ns} \delta \phi_s + Q_n \delta w \right) ds + \int_\Omega \left(q \delta w + f_x \delta u + f_y \delta v \right) d\Omega
\end{aligned}
$$

Mindlin板动力弯曲问题虚功方程(弱形式)

前面方程中删除平面内变形相关的项，
得到纯弯曲问题的虚功方程为:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial x} M_{xx} + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial y} M_{yy} + \left(\frac{\partial \delta\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta\phi_y}{\partial x} \right) M_{xy} \right. \\
&\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \delta\phi_x \right) Q_x + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} + \delta\phi_y \right) Q_y + \\
&\left. I_0 \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \delta\phi_x \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_2 \delta\phi_y \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \right] d\Omega = \\
&\int_\Gamma \left(M_{nn}\delta\phi_n + M_{ns}\delta\phi_s + Q_n \delta w \right) ds + \int_\Omega q\delta w d\Omega
\end{aligned}
$$

- 从虚功方程也可以得到平衡方程。

$$u_n = un_x + vn_y \qquad \phi_n = \phi_x n_x + \phi_y n_y$$

$$u_s = -un_y + vn_x \qquad \phi_s = -\phi_x n_y + \phi_y n_x$$

边界条件

$$\int_\Omega\Bigg[\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)M_{xy}$$

$$\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\phi_x\right)Q_x+\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\phi_y\right)Q_y+$$

$$I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_x\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_y\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\Bigg]d\Omega=$$

$$\int_\Gamma\left(M_{nn}\delta\phi_n+M_{ns}\delta\phi_s+Q_n\delta w\right)ds+\int_\Omega q\delta w d\Omega$$

$$u_n,\ u_s,\ \boxed{w_0,\ \phi_n,\ \phi_s}$$

$$N_{nn},\ N_{ns},\ \boxed{Q_n,\ M_{nn},\ M_{ns}}$$

平面内变形项　　　　弯曲变形项

$$w_0=\bar{w}_0,\ Q_n=\hat{Q}_n$$

$$\phi_n=\bar{\phi}_n,\ M_{nn}=\hat{M}_{nn}$$

$$\phi_s=\bar{\phi}_s,\ M_{ns}=\hat{M}_{ns}$$

三种典型边界条件:

1. 固支(clamped)边界C_1:

$$w_0=\bar{w}_0,\phi_n=\bar{\phi}_n,\phi_s=\bar{\phi}_s$$

2. 简支(simply supported)边界C_2:

$$w_0=\bar{w}_0,M_{nn}=\bar{M}_{nn},M_{ns}=\bar{M}_{ns}$$

3. 自由(free)边界C_3:

$$Q_n=\bar{Q}_n,M_{nn}=\bar{M}_{nn},M_{ns}=\bar{M}_{ns}$$

Mindlin板动力弯曲问题虚功方程(弱形式)

引入分类边界条件后，虚功方程为：

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial x}M_{xx}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial y}M_{yy}+\left(\frac{\partial\delta\phi_x}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi_y}{\partial x}\right)M_{xy}\right.$$

$$\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\delta\phi_x\right)Q_x+\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\phi_y\right)Q_y+$$

$$\left.I_0\delta w\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_x\frac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}+I_2\delta\phi_y\frac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\right]d\Omega=$$

$$\int_{C_2+C_3}\left(\bar{M}_{nn}\delta\phi_n+\bar{M}_{ns}\delta\phi_s\right)ds+\int_{C_3}\bar{Q}_n\delta w ds+\int_{\Omega}q\delta w d\Omega$$

$$\mathbf{\Phi}=\begin{Bmatrix}\phi_x\\\phi_y\end{Bmatrix},\mathbf{\Phi}_n=\begin{Bmatrix}\phi_n\\\phi_s\end{Bmatrix},\mathbf{M}_n=\begin{Bmatrix}M_{nn}\\M_{ns}\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}Q_x\\Q_y\end{bmatrix}\quad\mathbf{M}=\begin{Bmatrix}M_{xx}\\M_{yy}\\M_{xy}\end{Bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{\Phi}}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2\phi_x}{\partial t^2}\\\dfrac{\partial^2\phi_y}{\partial t^2}\end{Bmatrix}\quad\mathbf{L}_1=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\\dfrac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}\quad\mathbf{L}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&0\\0&\dfrac{\partial}{\partial y}\\\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}$$

矩阵形式

$$\int_{\Omega}\left[I_0\delta w\ddot{w}+I_2\delta\mathbf{\Phi}^T\ddot{\mathbf{\Phi}}+\mathbf{Q}^T\left(\delta\mathbf{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)+\mathbf{M}^T\mathbf{L}\delta\mathbf{\Phi}\right]d\Omega=$$

$$\int_{\Omega}\delta w^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\mathbf{\Phi}_n{}^T\mathbf{M}_n ds+\int_{C_3}\delta w^T Q_n ds$$

Mindlin板动力弯曲问题虚功方程矩阵形式

$$\int_{\Omega}\left[I_0\delta w\ddot{w}+I_2\delta\mathbf{\Phi}^T\ddot{\mathbf{\Phi}}+\mathbf{Q}^T\left(\delta\mathbf{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)+\mathbf{M}^T\mathbf{L}\delta\mathbf{\Phi}\right]d\Omega=$$
$$\int_{\Omega}\delta w^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\mathbf{\Phi}_n{}^T\mathbf{M}_n ds+\int_{C_3}\delta w^T Q_n ds$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{\Phi}\qquad\qquad \mathbf{Q}=\mathbf{G}\left(\mathbf{\Phi}+\mathbf{L}_1 w\right)$$

带入上面两个本构关系后，得到：

$$\int_{\Omega}\left[I_0\delta w^T\ddot{w}+I_2\delta\mathbf{\Phi}^T\ddot{\mathbf{\Phi}}+\left(\delta\mathbf{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)^T\mathbf{G}\left(\delta\mathbf{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)+\left(\mathbf{L}\delta\mathbf{\Phi}\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}\delta\mathbf{\Phi}\right)\right]d\Omega=$$
$$\int_{\Omega}\delta w^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\mathbf{\Phi}_n{}^T\mathbf{M}_n ds+\int_{C_3}\delta w^T Q_n ds$$

Mindlin板动力弯曲问题的有限元格式

挠度插值 $w(x,y,t)=\sum_{j=1}^{n} w_j(t)\psi_j^1(x,y)$

转角插值

$$\phi_x(x,y,t)=\sum_{j=1}^{m} S_j^x(t)\psi_j^2(x,y)$$

$$\phi_y(x,y,t)=\sum_{j=1}^{m} S_j^y(t)\psi_j^2(x,y)$$

挠度插值矩阵形式 $w(x,y,t)=\Psi^1\mathbf{W}$

转角插值矩阵形式 $\boldsymbol{\Phi}(x,y,t)=\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix}=\Psi^2\mathbf{S}$

挠度形函数矩阵 $\Psi^1=\{\psi_1^1 \quad \psi_2^1 \quad \cdots \quad \psi_n^1\}$

转角形函数矩阵

$$\Psi^2=\begin{bmatrix}\psi_1^2 & 0 & \psi_2^2 & \cdots & \psi_n^2 & 0\\ 0 & \psi_1^2 & 0 & \psi_2^2 & \cdots & \psi_n^2\end{bmatrix}$$

挠度节点自由度向量 $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}=\{w_1\ w_2\ w_3\ \cdots\ w_n\}$

转角节点自由度向量 $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}=\{S_1^x\ S_1^y\ S_2^x\ S_2^y\ \cdots\ S_m^x\ S_m^y\}$

Mindlin板动力弯曲问题的有限元格式

$$\int_{\Omega}\left[I_0\delta w^T\ddot{w}+I_2\delta\boldsymbol{\Phi}^T\ddot{\boldsymbol{\Phi}}+\left(\delta\boldsymbol{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)^T\mathbf{G}\left(\delta\boldsymbol{\Phi}+\mathbf{L}_1\delta w\right)+\left(\mathbf{L}\delta\boldsymbol{\Phi}\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}\delta\boldsymbol{\Phi}\right)\right]d\Omega=$$
$$\int_{\Omega}\delta w^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\boldsymbol{\Phi}_n{}^T\mathbf{M}_n ds+\int_{C_3}\delta w^T Q_n ds$$

$$w(x,y,t)=\Psi^1\mathbf{W}\qquad \boldsymbol{\Phi}(x,y,t)=\begin{Bmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{Bmatrix}=\Psi^2\mathbf{S}$$

将上面两个插值带入虚功方程中得到:

$$\int_{\Omega}\Big[I_0\delta\mathbf{W}^T\left(\Psi^1\right)^T\left(\Psi^1\right)\delta\ddot{\mathbf{W}}+I_2\delta\mathbf{S}^T\left(\Psi^2\right)^T\left(\Psi^2\right)\ddot{\mathbf{S}}+$$
$$\left(\delta\mathbf{S}^T\left(\Psi^2\right)^T+\delta\mathbf{W}^T\left(\mathbf{L}_1\Psi^1\right)^T\right)\mathbf{G}\left(\Psi^2\mathbf{S}+\mathbf{L}_1\Psi^1\mathbf{W}\right)+\delta\mathbf{S}^T\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)\mathbf{S}\Big]d\Omega$$
$$\int_{\Omega}\delta\mathbf{W}^T\left(\Psi^1\right)^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\mathbf{S}^T\left(\Psi^2\right)^T\widehat{\mathbf{M}}ds+\int_{C_3}\delta\mathbf{W}^T\left(\Psi^1\right)^T Q_n ds$$

$$\widehat{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}M_{nn}n_x-M_{ns}n_y\\ M_{nn}n_y+N_{ns}n_x\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}M_{xx}n_x+M_{xy}n_y\\ M_{yy}n_y+M_{xy}n_{xx}\end{pmatrix}$$

Mindlin板动力弯曲问题的有限元格式

$$\int_\Omega \Big[I_0 \delta \mathbf{W}^T (\Psi^1)^T (\Psi^1) \delta \ddot{\mathbf{W}} + I_2 \delta \mathbf{S}^T (\Psi^2)^T (\Psi^2) \ddot{\mathbf{S}} +$$

$$\left(\delta \mathbf{S}^T (\Psi^2)^T + \delta \mathbf{W}^T (\mathbf{L}_1 \Psi^1)^T \right) \mathbf{G} \left(\Psi^2 \mathbf{S} + \mathbf{L}_1 \Psi^1 \mathbf{W} \right) + \delta \mathbf{S}^T (\mathbf{L}\Psi^2)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}\Psi^2) \mathbf{S} \Big] d\Omega$$

$$\int_\Omega \delta \mathbf{W}^T (\Psi^1)^T q d\Omega + \int_{C_2+C_3} \delta \mathbf{S}^T (\Psi^2)^T \widehat{\mathbf{M}} ds + \int_{C_3} \delta \mathbf{W}^T (\Psi^1)^T Q_n ds$$

$\delta \mathbf{W}^T$

$\delta \mathbf{S}^T$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{W}} \\ \ddot{\mathbf{S}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{11} = \int_{\Omega_e} I_0 (\Psi^1)^T \Psi^1 d\Omega, \ \mathbf{M}^{12} = \int_{\Omega_e} I_2 (\Psi^2)^T \Psi^2 d\Omega$$

$$\mathbf{K}^{11} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}_1 \Psi^1)^T \mathbf{G} (\mathbf{L}_1 \Psi^1) d\Omega, \ \mathbf{K}^{12} = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}_1 \Psi^1)^T \mathbf{G} \Psi^2 d\Omega = (\mathbf{K}^{21})^T$$

$$\mathbf{K}^{22} = \int_{\Omega_e} \left[(\mathbf{L}\Psi^2)^T \mathbf{D} (\mathbf{L}_1 \Psi^2) + (\Psi^2)^T \mathbf{G} \Psi^2 \right] d\Omega$$

$$\mathbf{F}^1 = \int_{\Omega_e} (\Psi^1)^T q d\Omega + \int_{C_3} (\Psi^1)^T Q_n ds, \ \mathbf{F}^2 = \int_{C_2+C_3} (\Psi^2)^T \widehat{\mathbf{M}} ds$$

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M_{nn} n_x - M_{ns} n_y \\ M_{nn} n_y + N_{ns} n_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \\ M_{yy} n_y + M_{xy} n_{xx} \end{pmatrix}$$

Mindlin板静力弯曲问题的有限元格式

删除时间导数相关项后得到静力弯曲问题的虚功方程:

$$\int_{\Omega}\left[\left(\delta\mathbf{S}^T\left(\Psi^2\right)^T+\delta\mathbf{W}^T\left(\mathbf{L}_1\Psi^1\right)^T\right)\mathbf{G}\left(\Psi^2\mathbf{S}+\mathbf{L}_1\Psi^1\mathbf{W}\right)+\delta\mathbf{S}^T\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)\mathbf{S}\right]d\Omega$$

$$\int_{\Omega}\delta\mathbf{W}^T\left(\Psi^1\right)^T q d\Omega+\int_{C_2+C_3}\delta\mathbf{S}^T\left(\Psi^2\right)^T\widehat{\mathbf{M}}ds+\int_{C_3}\delta\mathbf{W}^T\left(\Psi^1\right)^T Q_n ds$$

$$\begin{array}{c}\delta\mathbf{W}^T\\ \delta\mathbf{S}^T\end{array}\quad\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12}\\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{W}\\ \mathbf{S}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}^1\\ \mathbf{F}^2\end{Bmatrix}}$$

所有矩阵的表达式跟动力弯曲问题完全一致

$$\mathbf{K}^{11}=\int_{\Omega_e}\left(\mathbf{L}_1\Psi^1\right)^T\mathbf{G}\left(\mathbf{L}_1\Psi^1\right)d\Omega,\ \mathbf{K}^{12}=\int_{\Omega_e}\left(\mathbf{L}_1\Psi^1\right)^T\mathbf{G}\Psi^2 d\Omega=\left(\mathbf{K}^{21}\right)^T$$

$$\mathbf{K}^{22}=\int_{\Omega_e}\left[\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)^T\mathbf{D}\left(\mathbf{L}_1\Psi^2\right)+\left(\Psi^2\right)^T\mathbf{G}\Psi^2\right]d\Omega$$

$$\mathbf{F}^1=\int_{\Omega_e}\left(\Psi^1\right)^T q d\Omega+\int_{C_3}\left(\Psi^1\right)^T Q_n ds,\ \mathbf{F}^2=\int_{C_2+C_3}\left(\Psi^2\right)^T\widehat{\mathbf{M}}ds$$

$$\widehat{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}M_{nn}n_x-M_{ns}n_y\\ M_{nn}n_y+N_{ns}n_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{xx}n_x+M_{xy}n_y\\ M_{yy}n_y+M_{xy}n_{xx}\end{pmatrix}$$

Mindlin板有限元的剪切自锁问题

如果挠度和转角使用同样的插值，对于薄板可能导致和Timonshenko梁一样的剪切自锁问题，因为薄板无剪切。

$$\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

上面两个约束导致刚度过大，计算得到的广义位移误差很大。其中一个解决方案是对于剪切相关的刚度项使用减缩积分，即公式中所有含有矩阵**G**的项。

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{S} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{Bmatrix}}$$

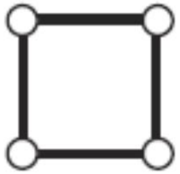
$$\mathbf{K}^{11} = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{L}_1 \Psi^1\right)^T \mathbf{G} \left(\mathbf{L}_1 \Psi^1\right) d\Omega, \; \mathbf{K}^{12} = \int_{\Omega_e} \left(\mathbf{L}_1 \Psi^1\right)^T \mathbf{G} \Psi^2 d\Omega = \left(\mathbf{K}^{21}\right)^T$$

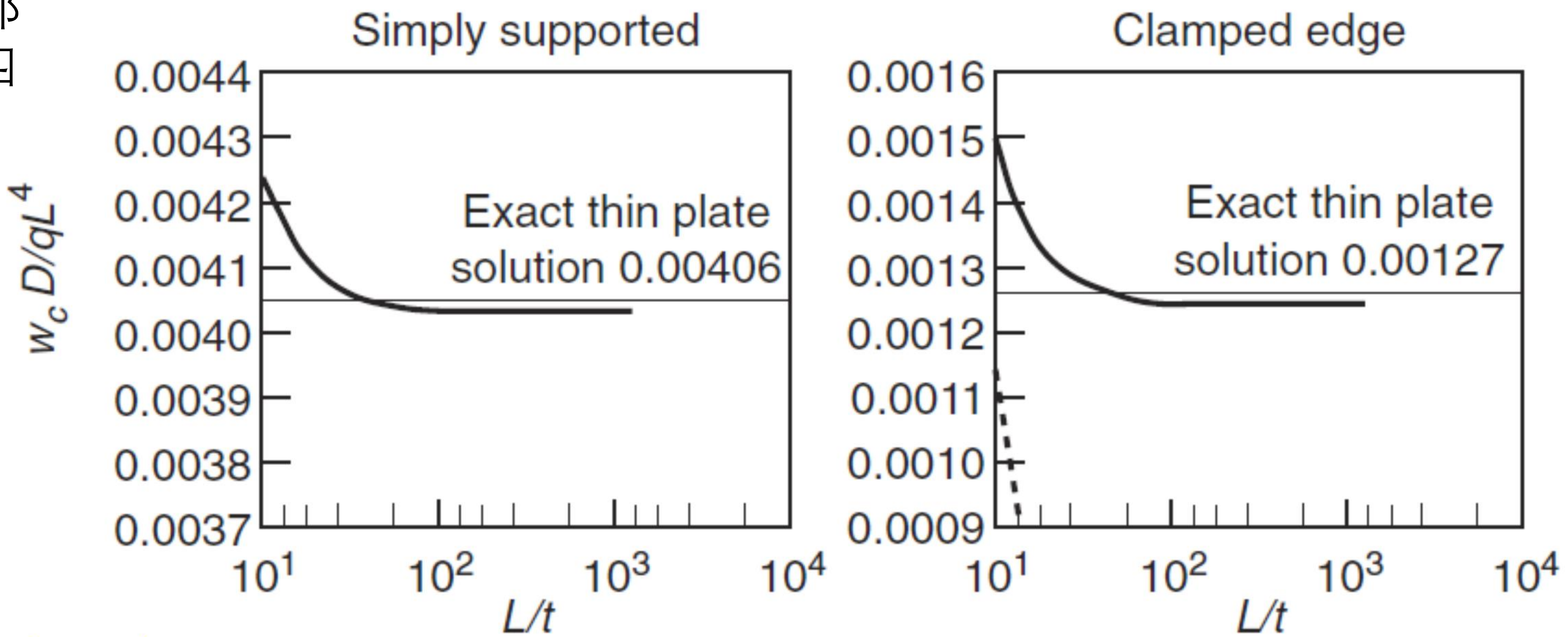
$$\mathbf{K}^{22} = \int_{\Omega_e} \left[\left(\mathbf{L}\Psi^2\right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{L}_1 \Psi^2\right) + \left(\Psi^2\right)^T \mathbf{G} \Psi^2\right] d\Omega$$

$$\mathbf{F}^1 = \int_{\Omega_e} \left(\Psi^1\right)^T q \, d\Omega + \int_{C_3} \left(\Psi^1\right)^T Q_n ds, \; \mathbf{F}^2 = \int_{C_2 + C_3} \left(\Psi^2\right)^T \hat{\mathbf{M}} ds$$

Mindlin板有限元的剪切自锁问题

挠度和转角都采用双线性四边形单元。





Selective reduced integration

L-R ——— 2 x 2 flexure integration – 1 x 1 shear integration

L-N - - - - 2 x 2 integration of all terms – this gives poor results, and diverges rapidly as L/t increases

Kirchhoff/Mindlin板弯曲问题瞬态分析的有限元格式

两种板的系统方程组都可以写成: $\boxed{\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\Delta}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{F}}$

Newmark
时间积分

$$\dot{\boldsymbol{\Delta}}_{s+1} = \dot{\boldsymbol{\Delta}}_s + a_1\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_s + a_2\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_{s+1}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_{s+1} = \boldsymbol{\Delta}_s + \dot{\boldsymbol{\Delta}}_s\Delta t + \frac{1}{2}[(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_s + \gamma\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_{s+1}](\Delta t)^2$$

$$a_1 = (1-\alpha)\Delta t$$
$$a_2 = \alpha\Delta t$$

α和γ是两个参数，不同的取值得到的动力格式稳定性和精度不同。

将Newmark积分的第2个公式中解除时间二阶导数并带入系统方程得到:

$$\boxed{\hat{\mathbf{K}}_{s+1}\boldsymbol{\Delta}_{s+1} = \hat{\mathbf{F}}_{s,s+1}}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{s+1} = \mathbf{K}_{s+1} + a_3\mathbf{M}_{s+1}$$

$$a_3 = \frac{2}{\gamma(\Delta t)^2}, \quad a_4 = a_3\Delta t, \quad a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{s,s+1} = \mathbf{F}_{s+1} + \mathbf{M}_{s+1}(a_3\boldsymbol{\Delta}_s + a_4\dot{\boldsymbol{\Delta}}_s + a_5\ddot{\boldsymbol{\Delta}}_s)$$

Kirchhoff/Mindlin板弯曲问题瞬态分析的有限元格式

得到s+1时刻的未知量后，从Newmark积分公式中可以解出s+1时刻的时间一阶和二阶导数，具体公式为:

$$\ddot{\Delta}_{s+1} = a_3(\Delta_{s+1} - \Delta_s) - a_4\dot{\Delta}_s - a_5\ddot{\Delta}_s$$

$$\dot{\Delta}_{s+1} = \dot{\Delta}_s + a_1\ddot{\Delta}_s + a_2\ddot{\Delta}_{s+1}$$

◆ 这里求解动力问题的方法(Newmark时间积分方法以及利用Newmark时间积分从系统方程组中消去时间二阶导数)也适用于其他动力学问题。

梁弯曲问题的有限元

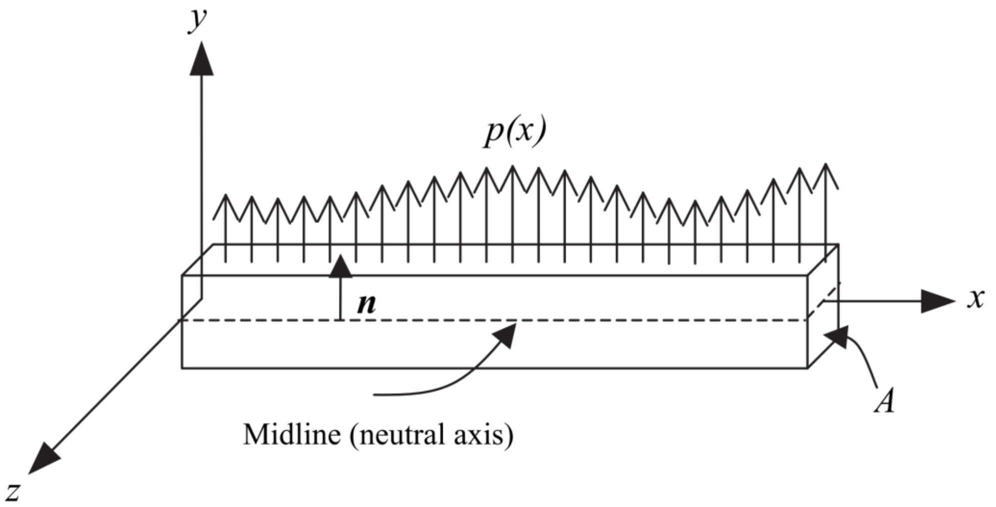
参考文献(reference):

1. Jacob Fish and Ted Belytschko, A First Course in Finite Elements, chapter 10.
2. J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill, NY, 2006.
3. J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, Lecture Notes, Chapter 3. https://mechanics.tamu.edu/an-introduction-to-the-finite-element-method/
4. J.N.Reddy, Lectures on Beams, Plates, and Shells, Lecture Notes, Chapter 3. https://mechanics.tamu.edu/lectures-on-beams-plates-and-shells/

- 用实体单元描述结构构件(梁、板、壳)的变形不经济，因此需要引入不同的近似条件建立梁、板、壳理论。
- 梁的变形可以分解为伸长(缩短)变形和弯曲变形，两种变形可以独立求解。
- 伸长(缩短)变形相当于杆的变形。
- 梁和杆单元组合可以模拟框架结构。
- 弯曲变形由不同的梁理论描述。

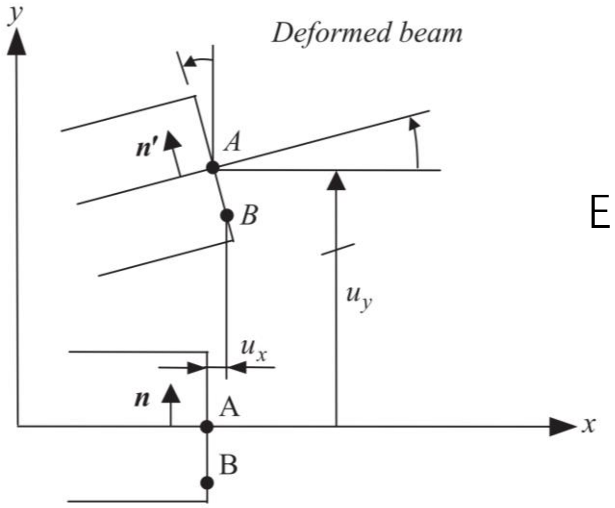
工程梁(Euler–Bernoulli梁)

变形前垂直于中性轴的平面变形后
1)保持为平面;
2)仍然垂直于中性轴;
3)没有伸长和压缩变形。



梁示意图

适用条件:小应变，中等转动(moderately large rotations but with small strains)。细长梁(thin beam)。



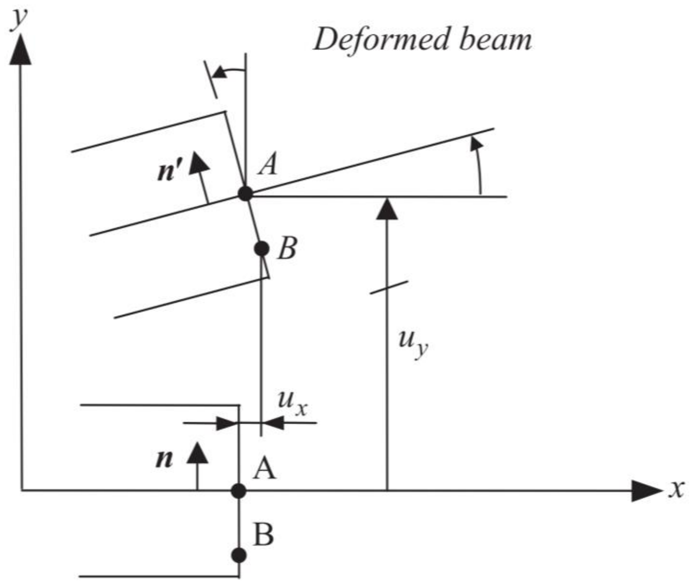
Euler–Bernoulli梁的变形

Euler–Bernoulli梁的运动学关系

$$u_x = -y \sin \theta(x) \qquad (1)$$

θ是中性面的转角，逆时针为正。

$$\theta = \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} \qquad (2)$$



在微小变形的情况，$\sin\theta = \theta$, 把(2)带入(1)得到:

$$u_x = -y\frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}$$

如果进一步考虑中性面的延伸$u^M{}_x$:

$$u_x(x) = u_x^M(x) - y\frac{\partial u_y(x)}{\partial x}$$

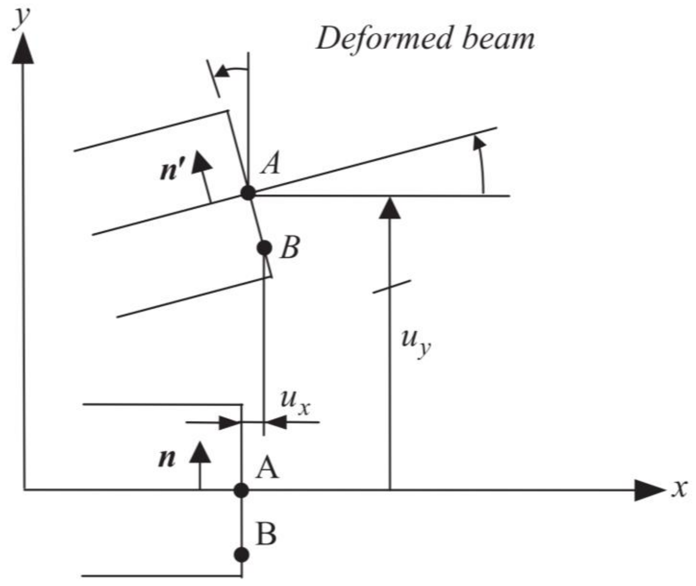
Euler–Bernoulli梁的运动学关系

忽略u_y随坐标y的变化，得到:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x^{\mathrm{M}}}{\partial x} - y\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,$$

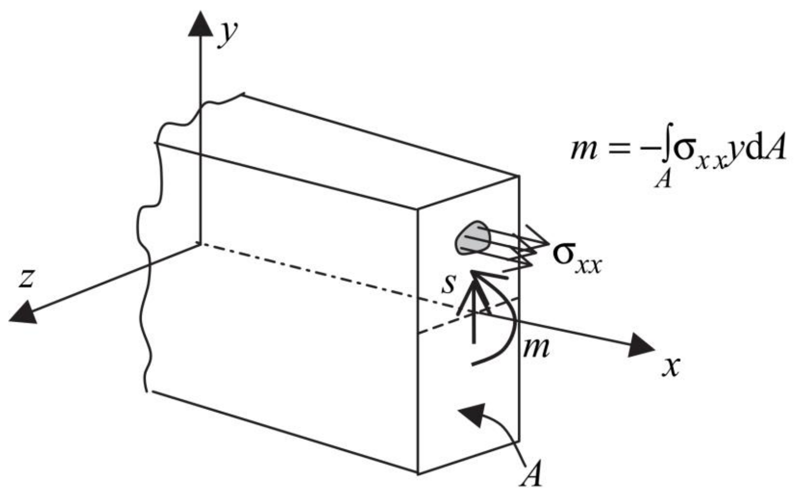
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0.$$



本构关系

忽略σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{zx}和σ_{zy}

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E\left(\frac{du_x^{\mathrm{M}}}{dx} - y\frac{d^2u_y}{dx^2}\right)$$



The resultant moment *m* and shear *s* on a cross section of the beam

力矩 $$m = -\int_A y\sigma_{xx}\,\mathrm{d}A.$$

$$m = -\int_A yE\left(\frac{\mathrm{d}u_x^{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}x} - y\frac{\mathrm{d}^2u_y}{\mathrm{d}x^2}\right)\mathrm{d}A = \int_A Ey^2\frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}A$$

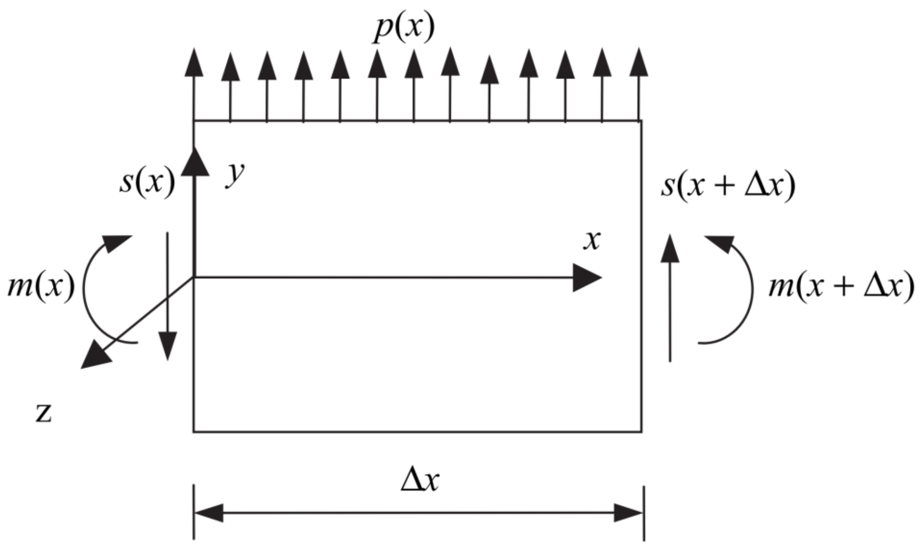
$$\boxed{m = E\frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2}\int_A y^2\,\mathrm{d}A = EI\frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2} = EI\kappa}$$

$$m = E\frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2}\int_A y^2\,\mathrm{d}A = EI\frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2} = EI\kappa$$

$$I = \int_A y^2\,\mathrm{d}A, \qquad \kappa = \frac{\mathrm{d}^2u_y(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

平衡方程

- 在正的x平面上，当右手拇指指向z方向时，另外四个手指旋转的方向就是弯矩m正方向；在负的x平面上相反。
- 在正的x平面上，剪力s的正方向就是y轴正向；在负x平面上，正方向是y轴负向。

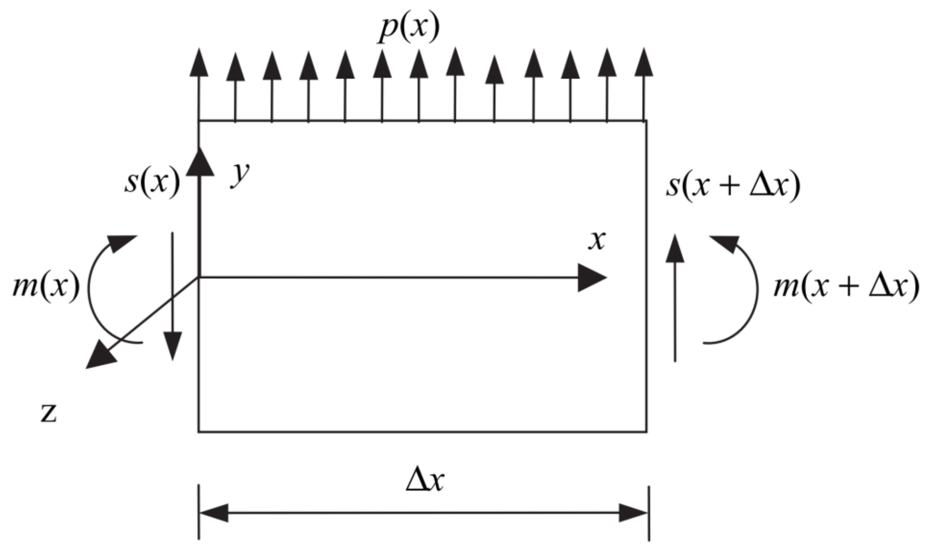


A segment of the beam used for development of equilibrium equations.

考虑纵向力的平衡：$$s(x+\Delta x)-s(x)+p\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x=0$$

Δx趋向0时取极限：$$\boxed{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}+p=0}$$

平衡方程



考虑关于(0,0)点的力矩平衡:

$$m(x+\Delta x)-m(x)+\Delta x s(x+\Delta x)+\frac{1}{2}\Delta x^2 p\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0$$

Δx趋向0时取极限: $$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}+s=0$$

上式对x求导并带入力平衡方程，得到: $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2}-p=0}$$

带入本构关系，得到: $$\boxed{EI\frac{\mathrm{d}^4 u_y}{\mathrm{d}x^4}-p=0}$$

四阶偏微分方程

边界条件

四种边界条件:

$$u_y = \bar{u}_y \quad \text{on} \quad \Gamma_u,$$

$$\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} = -\bar{\theta} \quad \text{on} \quad \Gamma_\theta,$$

$$mn = EI\frac{\mathrm{d}^2u_y}{\mathrm{d}x^2}n = \bar{m} \quad \text{on} \quad \Gamma_m,$$

$$sn = -EI\frac{\mathrm{d}^3u_y}{\mathrm{d}x^3}n = \bar{s} \quad \text{on} \quad \Gamma_s.$$

共轭(构成能量项)的边界只能同时出现一个

$$\Gamma_s \cap \Gamma_u = 0, \qquad \Gamma_s \cup \Gamma_u = \Gamma.$$

$$\Gamma_m \cap \Gamma_\theta = 0, \qquad \Gamma_m \cup \Gamma_\theta = \Gamma.$$

边界条件

几种典型的边界条件:

1. a free end with an applied load: 荷载作用的自由边界

$$sn = \bar{s} \quad \text{on} \quad \Gamma_s, \qquad mn = \bar{m} \quad \text{on} \quad \Gamma_m;$$

2. a simple support: 简支边界

$$\bar{m} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_m, \qquad \bar{u}_y = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_u;$$

3. a clamped support: 固支边界

$$\bar{u}_y = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_u, \qquad \bar{\theta} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\theta.$$

弱形式推导

$$\int_{\Omega} w\left(\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2}-p\right)\mathrm{d}x \;=0$$

$$\int_{\Omega} w\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(w\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=(-wsn)\Big|_{\Gamma}-\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

令在Γ_u上w=0:

$$\int_{\Omega} w\frac{\mathrm{d}^2 m}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x=(-w\bar{s})\Big|_{\Gamma_s}-\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}m\right)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}m\,\mathrm{d}x$$

令在Γ_θ上dw/dx=0:

$$=\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\bar{m}\right)\Big|_{\Gamma_m}-\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}m\,\mathrm{d}x.$$

弱形式推导

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} m \,\mathrm{d}x = \int_\Omega wp\,\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\bar{m}\right)\bigg|_{\Gamma_m} + (w\bar{s})|_{\Gamma_s} \quad \text{for} \quad \forall w \in U_0} \qquad \text{(a)}$$

定义试验函数(trial function)和测试函数(test function)空间：

$$U = \left\{ u_y | u_y \in H^2, u_y = \bar{u}_y \text{ on } \Gamma_u, \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}x} = \bar{\theta} \text{ on } \Gamma_\theta \right\}$$

$$U_0 = \left\{ w | w \in H^2, w = 0 \text{ on } \Gamma_u, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ on } \Gamma_\theta \right\}.$$

这里H^2意味着C^1函数。

$$\boxed{\text{find } u_y(x) \in U \text{ such that Eq. (a) holds } \forall w(x) \in U_0.}$$

弱形式推导

- w的作用相当于虚功原理中的δu;
- 虚功原理可以按照上面类似的方式推导(平衡方程两端乘以δu并积分)，虚功原理就是常规弹性力学平衡方程的弱形式(weak form)。
- 强形式(strong form，即平衡方程)和弱形式二者等价，对于常规弹性力学问题来说，虚功原理等价于平衡方程和应力边界条件。
- H^2函数表示二阶导数平方可积的函数。
- 对于常规的弹性力学平衡方程，试探函数和测试函数都属于H^1函数(一阶导数平方可积)，C^0函数就可以满足要求。

有限元离散

1. **弱形式中出现u_y的二阶导数，单纯从这点出发二次函数就可以满足要求。但是剪力是u_y三阶导数的线性函数，二次函数作为位移模式会导致剪力为0。因此，位移模式必须至少为三次函数。**
2. **C^1连续的插值有Hermite插值和B样条等，这里采用一阶Hermite插值。**

单元未知量向量：$$\mathbf{d}^e = [u_{y1}, \theta_1, u_{y2}, \theta_2]^{\mathrm{T}}$$

对应的节点力：$$\mathbf{f}^e = [f_{y1}, m_1, f_{y2}, m_2]^{\mathrm{T}}$$

$$u_y^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e, \qquad w^e = \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e$$

$$\begin{aligned}
N_{u1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \\
N_{\theta 1} &= \frac{l^e}{8}(1-\xi)^2(1+\xi), \\
N_{u2} &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \\
N_{\theta 2} &= \frac{l^e}{8}(1+\xi)^2(\xi-1),
\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{2x}{l^e} - 1, \quad \text{so} \quad -1 \le \xi \le 1$$

这里用定义在(-1,1)的局部坐标定义形函数，和之前用(0, 1)的局部坐标定义的实质上是完全相同的函数。

有限元离散

$$\mathbf{d}^e = [u_{y1}, \theta_1, u_{y2}, \theta_2]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{f}^e = [f_{y1}, m_1, f_{y2}, m_2]^{\mathrm{T}}$$

$$u_y^e = \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e, \qquad w^e = \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{N}^e}{\mathrm{d}x^2} = \underbrace{\frac{1}{l^e}\begin{bmatrix} \frac{6\xi}{l^e} & 3\xi - 1 & -\frac{6\xi}{l^e} & 3\xi + 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^e}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u_y^e}{\mathrm{d}x^2} = \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e$$

有限元离散

$$\boxed{\int_{\Omega} \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} m \,\mathrm{d}x = \int_{\Omega} wp \,\mathrm{d}x + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\bar{m}\right)\Bigg|_{\Gamma_m} + (w\bar{s})|_{\Gamma_s} \quad \text{for} \quad \forall w \in U_0}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} EI\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{B}^e \,\mathrm{d}x$$

$$\mathbf{f}^e = \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}} p \,\mathrm{d}x}_{\mathbf{f}^e_{\Omega}} + \underbrace{(\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\bar{s})|_{\Gamma_s} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x}\bar{m}\right)\Bigg|_{\Gamma_m}}_{\mathbf{f}^e_{\Gamma}}$$

有限元离散

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} EI\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{B}^e \,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{N}^e}{\mathrm{d}x^2} = \underbrace{\frac{1}{l^e}\begin{bmatrix}\frac{6\xi}{l^e} & 3\xi-1 & -\frac{6\xi}{l^e} & 3\xi+1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^e}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u_y^e}{\mathrm{d}x^2} = \mathbf{B}^e\mathbf{d}^e$$

刚度EI为常数的单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} EI\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{B}^e \,\mathrm{d}x = \frac{EI}{l^{e^3}}\begin{bmatrix} 12 & 6l^e & -12 & 6l^e \\ & 4l^{e^2} & -6l^e & 2l^{e^2} \\ & & 12 & -6l^e \\ \mathrm{Sym} & & & 4l^{e^2}\end{bmatrix}$$

有限元离散

$$\mathbf{f}^e = \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}} p \, \mathrm{d}x}_{\mathbf{f}^e_\Omega} + \underbrace{(\mathbf{N}^{e\mathrm{T}} \bar{s})\big|_{\Gamma_s} + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x} \bar{m}\right)\bigg|_{\Gamma_m}}_{\mathbf{f}^e_\Gamma}$$

$$\begin{aligned}
N_{u1} &= \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \\
N_{\theta 1} &= \frac{l^e}{8}(1-\xi)^2(1+\xi), \\
N_{u2} &= \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \\
N_{\theta 2} &= \frac{l^e}{8}(1+\xi)^2(\xi-1),
\end{aligned}$$

梁表面均布载荷p作用引起的荷载向量:

$$\mathbf{f}^e_\Omega = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}} p \, \mathrm{d}x = \int_0^{l^e} \begin{bmatrix} N_{u1} \\ N_{\theta 1} \\ N_{u2} \\ N_{\theta 2} \end{bmatrix} p \, \mathrm{d}x = \frac{p l^e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ l^e/6 \\ 1 \\ -l^e/6 \end{bmatrix}$$

最小势能原理

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} E\varepsilon^2 \,\mathrm{d}\Omega = \int_0^l \int_A E\varepsilon^2 \,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 u_y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

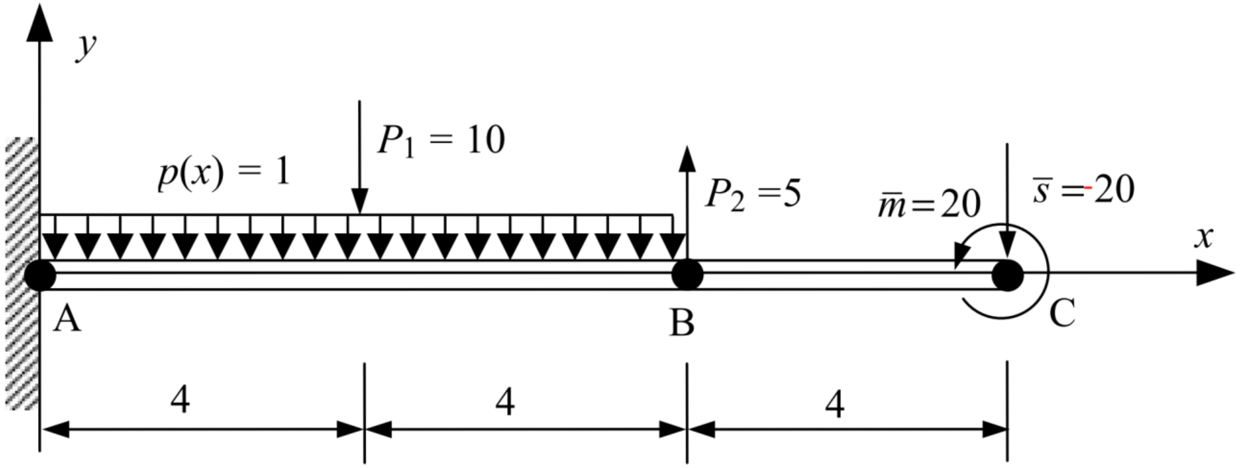
$$W_{\mathrm{ext}} = \int_0^l p u_y \,\mathrm{d}x + (u_y \bar{s})|_{\Gamma_s} + (\theta \bar{m})|_{\Gamma_m}$$

$$\Pi = W_{\mathrm{int}} - W_{\mathrm{ext}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{d}^{\mathrm{T}} \sum_{e=1}^{n_{el}} \left(\mathbf{L}^{e\mathrm{T}} \int_{\Omega^e} EI\mathbf{B}^{e\mathrm{T}}\mathbf{B}^e \,\mathrm{d}x^e \,\mathbf{L}^e \right) \mathbf{d}$$
$$- \mathbf{d}^{\mathrm{T}} \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{e\mathrm{T}} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{e\mathrm{T}} p \,\mathrm{d}x + \left(\mathbf{N}^{e\mathrm{T}} \bar{s} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x} \bar{m} \right) \Big|_{\Gamma^e} \right)$$

- $\mathbf{L}^e$是局部到整体的转换矩阵，相当于三角形单元中的矩阵G。
- 令势能的一阶变分为0，得到和前面完全一致的刚度方程。

算例

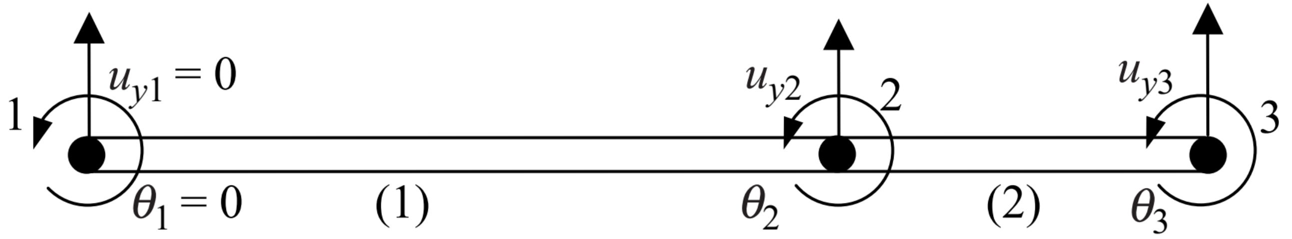


模型示意图

$$EI = 10^4\ \mathrm{N\,m^2}$$

$$\bar{s} = -20\ \mathrm{N}$$

$$\bar{m} = 20\ \mathrm{N\,m}$$

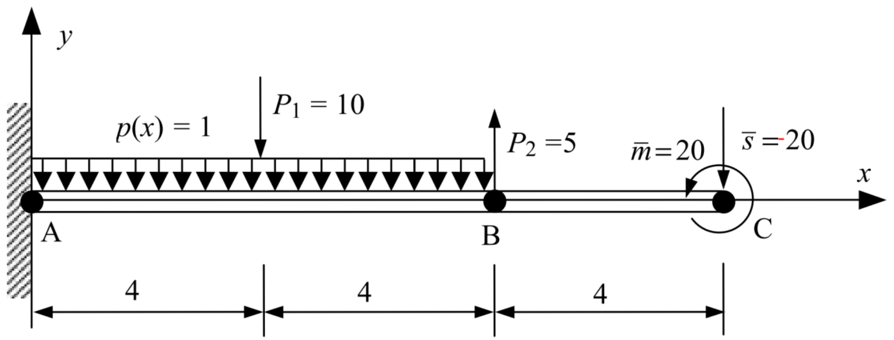


有限元网格：两个单元

整体未知量向量：

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}} = [u_{y1}, \theta_1, u_{y2}, \theta_2, u_{y3}, \theta_3]$$

算例



单元1刚度矩阵：$EI = 10^4, L = 8$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0.23 & 0.94 & -0.23 & 0.94 \\ 0.94 & 5.00 & -0.94 & 2.50 \\ -0.23 & -0.94 & 0.23 & -0.94 \\ 0.94 & 2.50 & -0.94 & 5.00 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} [1] \\ \\ [2] \end{array} \\ \begin{array}{cc} [1] \quad\quad\quad & \quad\quad\quad [2] \end{array} & \end{array}$$

单元2刚度矩阵：$EI = 10^4, L = 4$

$$\mathbf{K}^e = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1.88 & 3.75 & -1.88 & 3.75 \\ 3.75 & 10.00 & -3.75 & 5.00 \\ -1.88 & -3.75 & 1.88 & -3.75 \\ 3.75 & 5.00 & -3.75 & 10.00 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} [2] \\ \\ [3] \end{array} \\ \begin{array}{cc} [2] \quad\quad\quad & \quad\quad\quad [3] \end{array} & \end{array}$$

算例

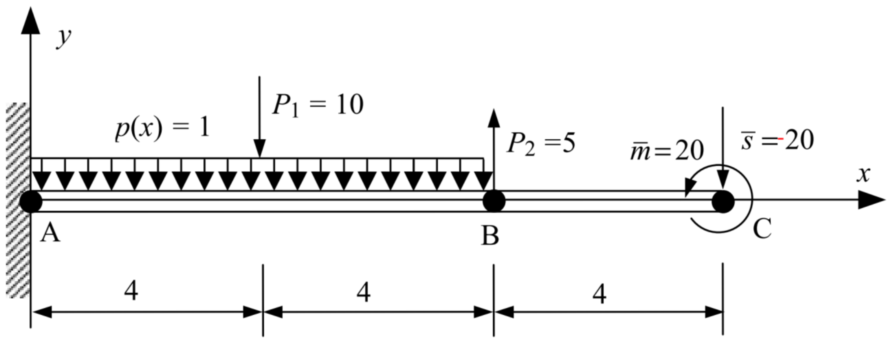
$$10^3\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0.23 & 0.94 & -0.23 & 0.94\\ 0.94 & 5.00 & -0.94 & 2.50\\ -0.23 & -0.94 & 0.23 & -0.94\\ 0.94 & 2.50 & -0.94 & 5.00\end{bmatrix} & \begin{matrix}[1]\\ \\ [2]\end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad[1] & \qquad\qquad [2]\end{matrix} & \end{array}\qquad 10^3\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1.88 & 3.75 & -1.88 & 3.75\\ 3.75 & 10.00 & -3.75 & 5.00\\ -1.88 & -3.75 & 1.88 & -3.75\\ 3.75 & 5.00 & -3.75 & 10.00\end{bmatrix} & \begin{matrix}[2]\\ \\ [3]\end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad[2] & \qquad\qquad [3]\end{matrix} & \end{array}$$

整体刚度矩阵：

$$\mathbf{K}=10^3\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0.23 & 0.94 & -0.23 & 0.94 & 0 & 0\\ 0.94 & 5.00 & -0.94 & 2.50 & 0 & 0\\ -0.23 & -0.94 & 2.11 & 2.81 & -1.88 & 3.75\\ 0.94 & 2.50 & 2.81 & 15.00 & -3.75 & 5.00\\ 0 & 0 & -1.88 & -3.75 & 1.88 & -3.75\\ 0 & 0 & 3.75 & 5.00 & -3.75 & 10.00\end{bmatrix} & \begin{matrix}[1]\\ \\ [2]\\ \\ [3]\end{matrix}\\ \begin{matrix}\qquad[1] & \qquad\qquad\quad [2] & \qquad\qquad\quad [3]\end{matrix} & \end{array}$$

算例

边界力引起的荷载向量:



$$\mathbf{f}_{\Gamma}^{e}=(\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}\bar{s})\big|_{\Gamma_s}+\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}}{\mathrm{d}x}\bar{m}\right)\bigg|_{\Gamma_m}$$

单元1上的边界上没有力作用,
单元2右端有弯矩和剪力作用:

$$\mathbf{f}_{\Gamma}^{(2)}=[0\quad 0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}\bar{m}+[0\quad 0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}\bar{s}=\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{c}0\\0\\-20\\20\end{array}\right] & \begin{array}{c}[2]\\ \\ {[3]}\\ \end{array}\end{array}$$

形函数矩阵求导并带入单元右端坐标

形函数矩阵带入单元右端坐标

组装后的荷载向量(边界力)

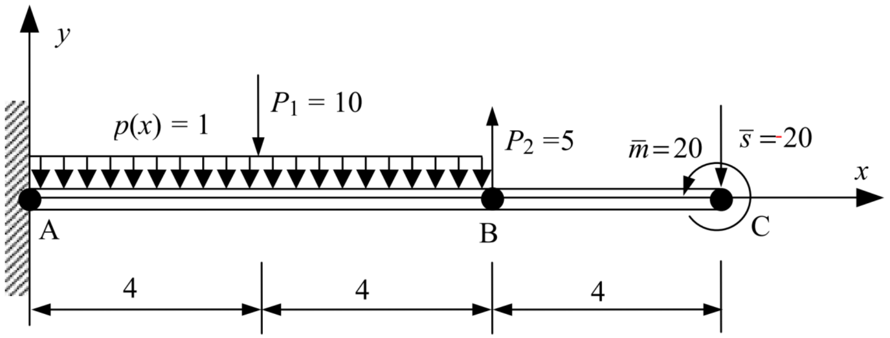
$$\mathbf{f}_{\Gamma}=\begin{array}{cc}\left[\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\-20\\20\end{array}\right] & \begin{array}{c}[1]\\ \\ {[2]}\\ \\ {[3]}\\ \end{array}\end{array}$$

算例

体积力(分布和集中)引起的荷载向量：

$$\mathbf{f}_{\Omega}^{e}=\int_{\Omega^e}\mathbf{N}^{e\mathrm{T}}p\,\mathrm{d}x$$

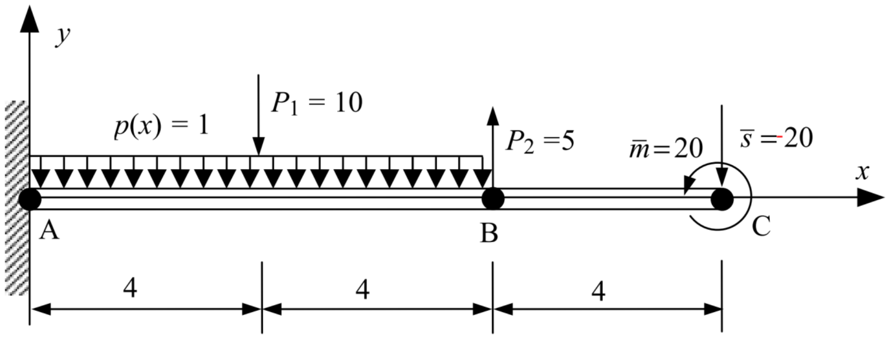
集中力当做作用在一点上的体积力



单元1上作用大小为p的分布力和单元中点作用的集中力P_1：

$$\mathbf{f}_{\Omega}^{(1)}=\int_{x_1^e}^{x_{n\mathrm{en}}^e}\begin{bmatrix}N_{u1}\\N_{\theta1}\\N_{u2}\\N_{\theta2}\end{bmatrix}p\,\mathrm{d}x+\begin{bmatrix}N_{u1}\\N_{\theta1}\\N_{u2}\\N_{\theta2}\end{bmatrix}_{\xi=0}P_1=\begin{bmatrix}-9\\-15.3\\-9\\15.3\end{bmatrix}\begin{matrix}[1]\\ \\ [2]\end{matrix}$$

算例



$$\mathbf{f}_{\Omega}^{(1)} = \begin{bmatrix} -9 \\ -15.3 \\ -9 \\ 15.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ \\ [2] \\ \end{matrix}$$

P_2：可以看做作用在单元2的左端点，也可以看做作用在单元1的右端点，结果完全一致。

单元2左端点作用集中力P_2：

$$\mathbf{f}_{\Omega}^{(2)} = \begin{bmatrix} N_{u1} \\ N_{\theta 1} \\ N_{u2} \\ N_{\theta 2} \end{bmatrix}_{\xi=-1} P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} [2] \\ \\ [3] \\ \end{matrix}$$

组装后的体积力引起的荷载向量：

$$\mathbf{f}_{\Omega} = \begin{bmatrix} -9 \\ -15.3 \\ -4 \\ 15.3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} [1] \\ \\ [2] \\ \\ [3] \\ \end{matrix}$$

算例

刚度方程(r表示支座反力):

$$\left[\begin{array}{cc:cccc} 0.23 & 0.94 & -0.23 & 0.94 & 0 & 0 \\ 0.94 & 5.00 & -0.94 & 2.50 & 0 & 0 \\ \hdashline -0.23 & -0.94 & 2.11 & 2.81 & -1.88 & 3.75 \\ 0.94 & 2.50 & 2.81 & 15.00 & -3.75 & 5.00 \\ 0 & 0 & -1.88 & -3.75 & 1.88 & -3.75 \\ 0 & 0 & 3.75 & 5.00 & -3.75 & 10.00 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_{y1}=0 \\ \theta_1=0 \\ \hdashline u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -9+r_{u1} \\ -15.3+r_{\theta 1} \\ \hdashline -4 \\ 15.3 \\ -20 \\ 20 \end{array}\right]$$

解:

$$\begin{bmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.55 \\ -0.11 \\ -1.03 \\ -0.12 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} r_{u1} \\ r_{\theta 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 252 \end{bmatrix}$$

算例

后处理:

$$m^{(1)} = EI\frac{\mathrm{d}^2 u^{(1)}}{\mathrm{d}x^2} = EI\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_{u1}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_{\theta 1}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_{u2}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_{\theta 2}}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = -240.64 + 25.785x,$$

$$s^{(1)} = -EI\frac{\mathrm{d}^3 u^{(1)}}{\mathrm{d}x^3} = -EI\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^3 N_{u1}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3 N_{\theta 1}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3 N_{u2}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3 N_{\theta 2}}{\mathrm{d}x^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = -25.785,$$

算例

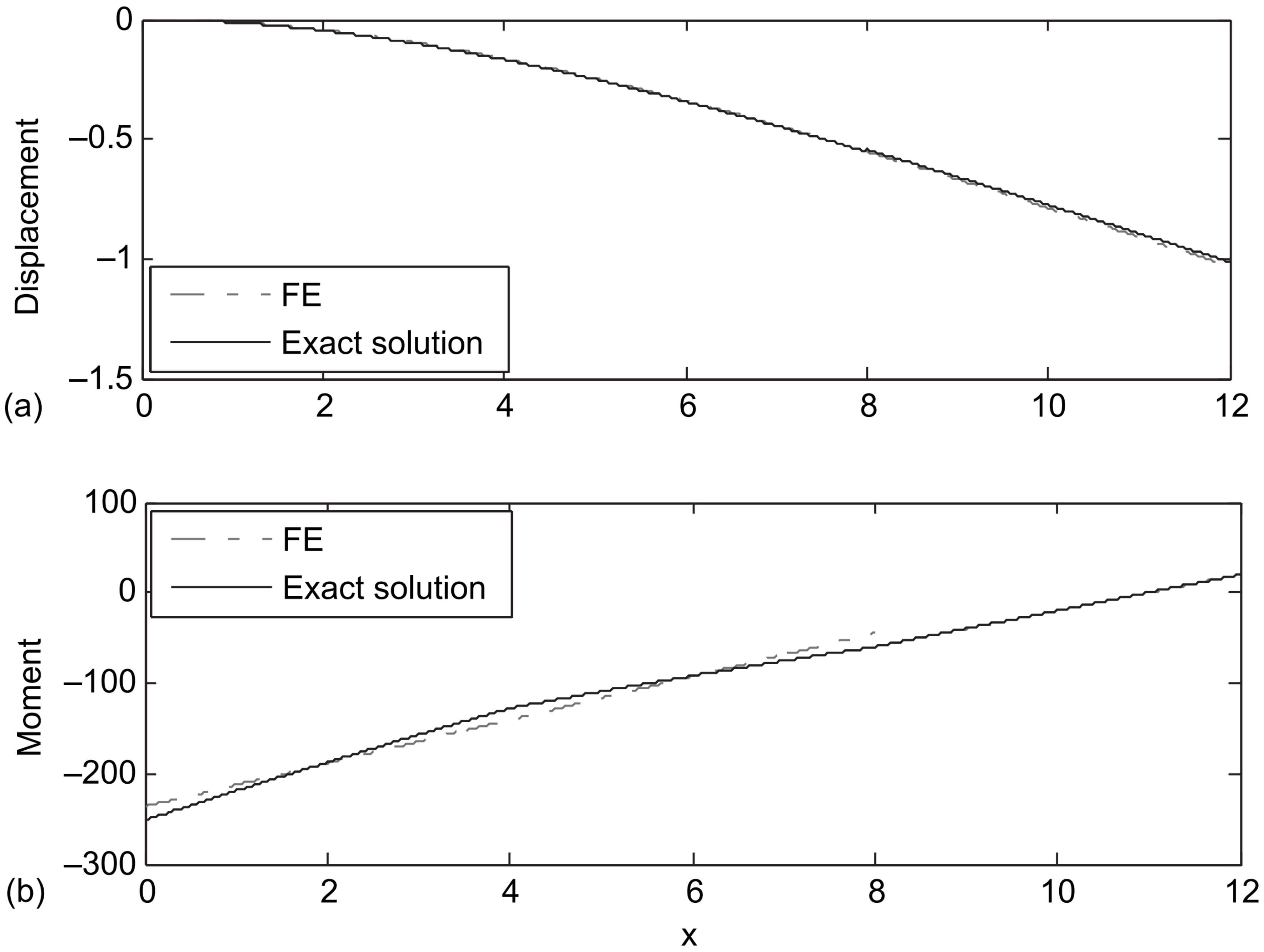
后处理:

$$m^{(2)} = EI\frac{\mathrm{d}^2u^{(2)}}{\mathrm{d}x^2} = EI\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2N_{u1}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2N_{\theta1}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2N_{u2}}{\mathrm{d}x^2} & \frac{\mathrm{d}^2N_{\theta2}}{\mathrm{d}x^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = -104.5 + 39.75x,$$

$$s^{(2)} = -EI\frac{\mathrm{d}^3u^{(2)}}{\mathrm{d}x^3} = -EI\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^3N_{u1}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3N_{\theta1}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3N_{u2}}{\mathrm{d}x^3} & \frac{\mathrm{d}^3N_{\theta2}}{\mathrm{d}x^3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{y2} \\ \theta_2 \\ u_{y3} \\ \theta_3 \end{bmatrix} = -39.75.$$

算例

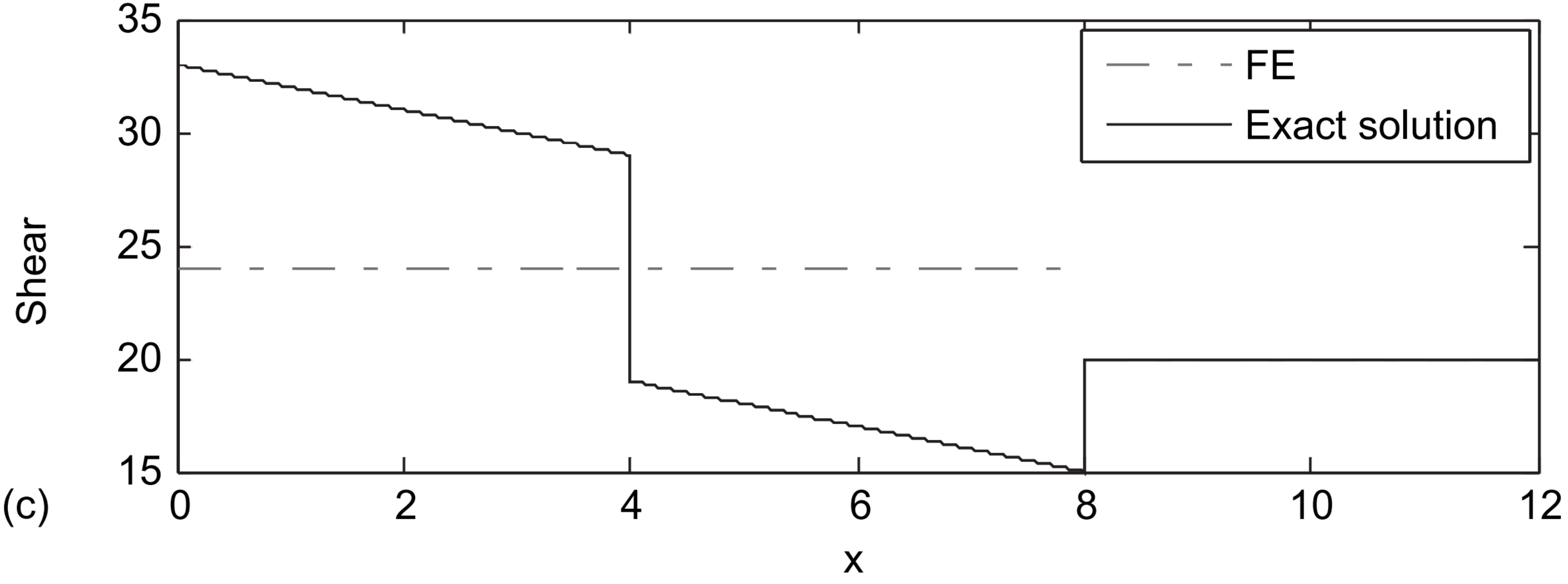
后处理:



0
−0.5
−1
−1.5
Displacement
FE
Exact solution
(a)
0
2
4
6
8
10
12
100
0
−100
−200
−300
Moment
FE
Exact solution
(b)
0
2
4
6
8
10
12
x

算例

后处理：



(c)

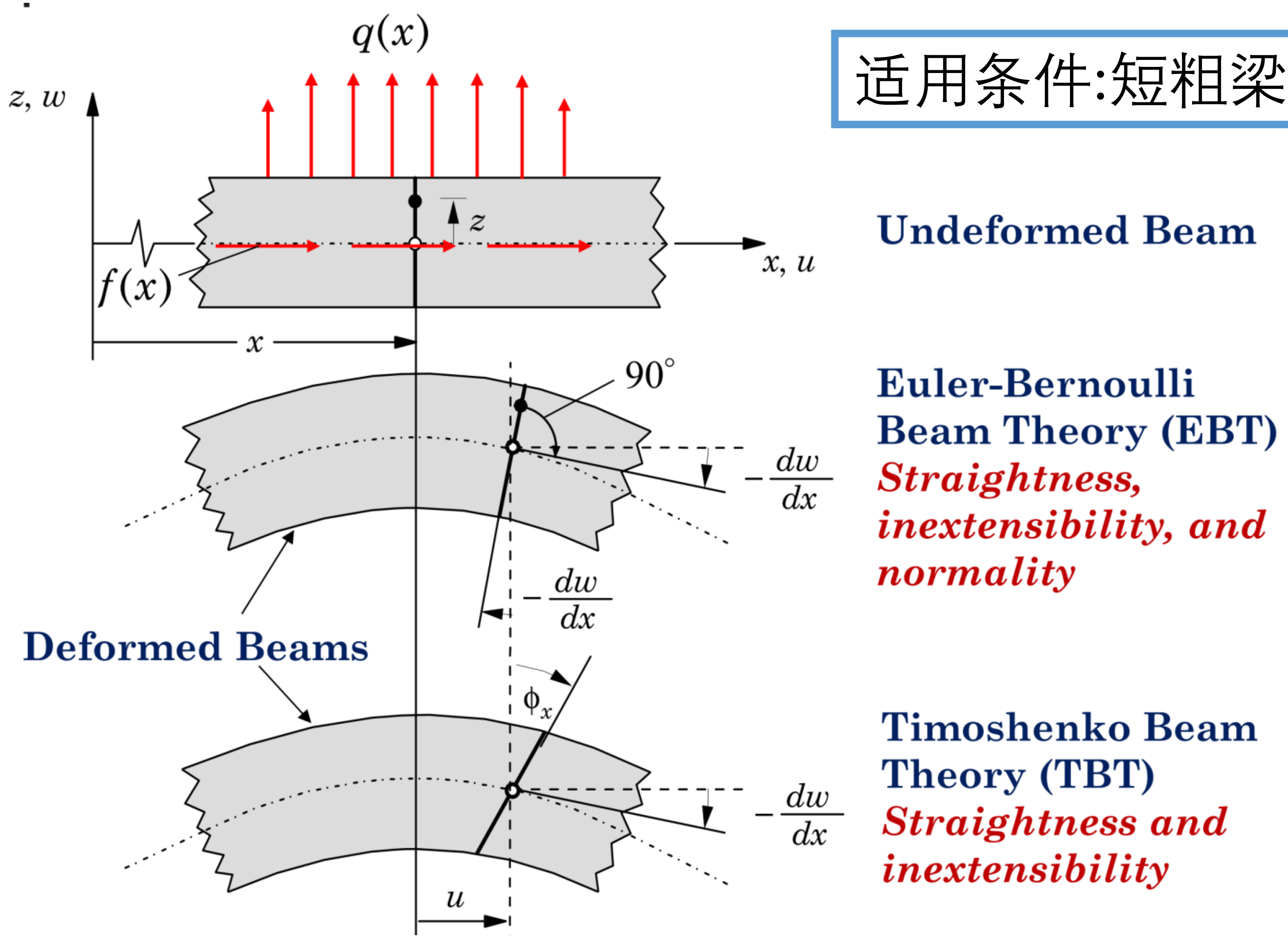
- 集中力作用处剪力突变，应该在集中力作用处分割单元。
- 1阶Hermite单元剪力为常数，需要划分更多单元才可以得到高精度的剪力解。

剪切梁(Timoshenko梁)

J.N.Reddy, An Introduction to the Finite Element Method, lecture notes, chapter 3

垂直于中性轴的平面变形后保持为平面但不一定垂直于中性轴，没有伸长和压缩变形。

适用条件:短粗梁(长高比小于20).

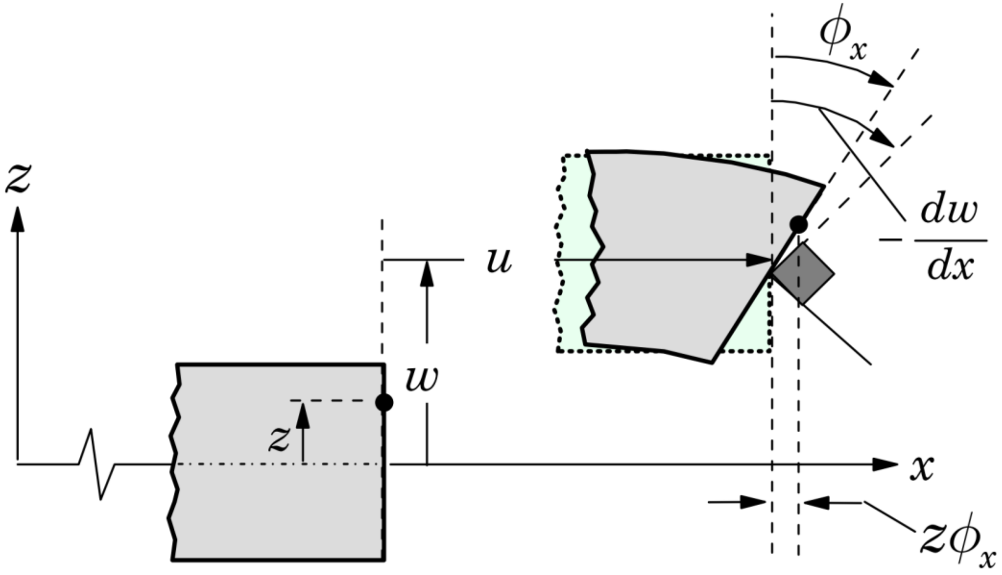


- 区别于Euler-Bernoulli梁，引入独立的截面转角Φ。
- 梁轴的转角不一定等于截面转角。
- 这里的转角定义以顺时针为正。

Timoshenko Beam Theory

Kinematic Relations

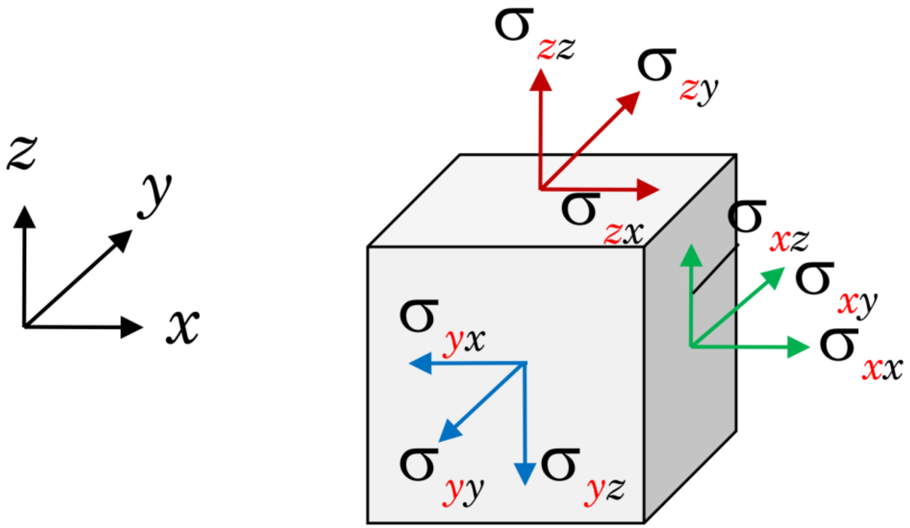
$$u_1(x,z) = u(x) + z\phi_x(x),$$
$$u_2 = 0, \quad u_3(x,z) = w(x)$$
$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du}{dx} + z\frac{d\phi_x}{dx},$$
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \phi_x + \frac{dw}{dx}$$



- 梁平面定义在oxz平面内。

Constitutive Equations

$$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx} = E\left(\frac{du}{dx} + z\frac{d\phi_x}{dx}\right)$$
$$\sigma_{xz} = G\,\gamma_{xz} = G\left(\phi_x + \frac{dw}{dx}\right)$$



$$N = \int_A \sigma_{xx}\, dA = \int_A E\left(\frac{du}{dx} + z\frac{d\phi_x}{dx}\right) dA = EA\frac{du}{dx}$$

$$M = \int_A \sigma_{xx} z\, dA = \int_A E\left(\frac{du}{dx} + z\frac{d\phi}{dx}\right) z\, dA = EI\frac{d\phi}{dx}$$

$$V = K_s \int_A \sigma_{xz}\, dA = GK_s\left(\phi + \frac{dw}{dx}\right)\int_A dA = GAK_s\left(\phi + \frac{dw}{dx}\right)$$

剪切校正系数(shear correction coefficient) K_s 的作用相当于将剪切模量变为K_sG。计算K_s的原则:当截面上作用任意一个剪力Q时，校正后的应力产生的剪切应变能等于实际应力(按照三维弹性理论计算)产生的应变能。

where G is the shear modulus and K_s is the *shear correction coefficient*, which is introduced to account for the difference in the constant state of shear stress in this theory and the parabolic variation of the shear stress predicted by the elasticity theory through the beam thickness. All other quantities have the same meaning as before. For short and

关于剪切系数Ks，参考：

J. R. Hutchinson, Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory, J. Appl. Mech. Jan 2001, 68(1): 87-92

For example, consider a homogeneous beam with rectangular cross section, with width b and height h. The actual shear stress distribution through the thickness of the beam is given by

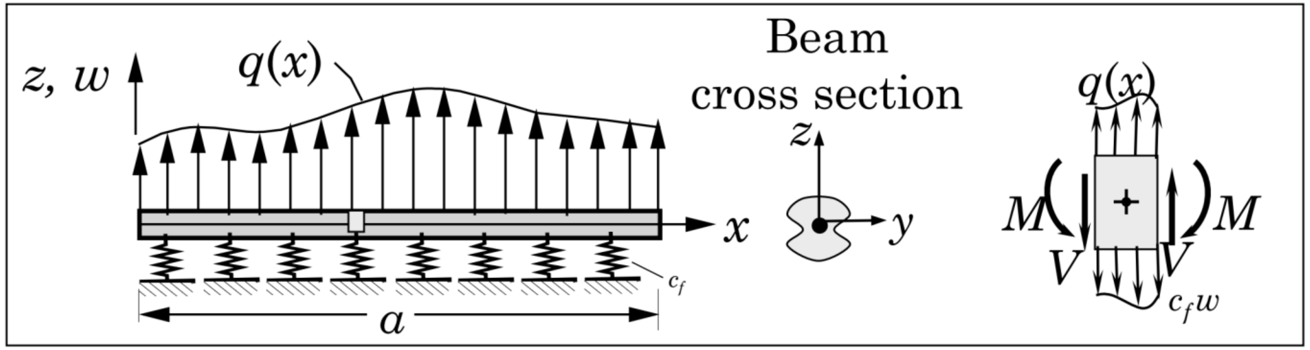
$$\sigma_{xz}^c = \frac{3Q_0}{2bh}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right], \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \tag{10.1.12}$$

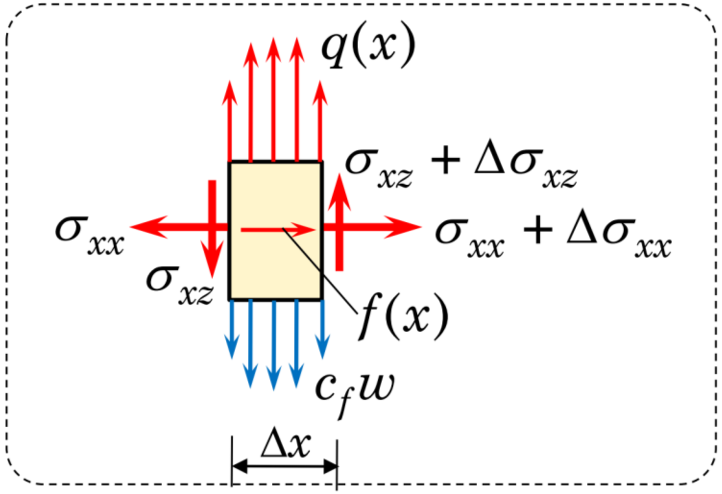
where Q_0 is the transverse load. The transverse shear stress in the first-order theory is a constant, $\sigma_{xz}^f = Q_0/bh$. The strain energies due to transverse shear stresses in the two theories are

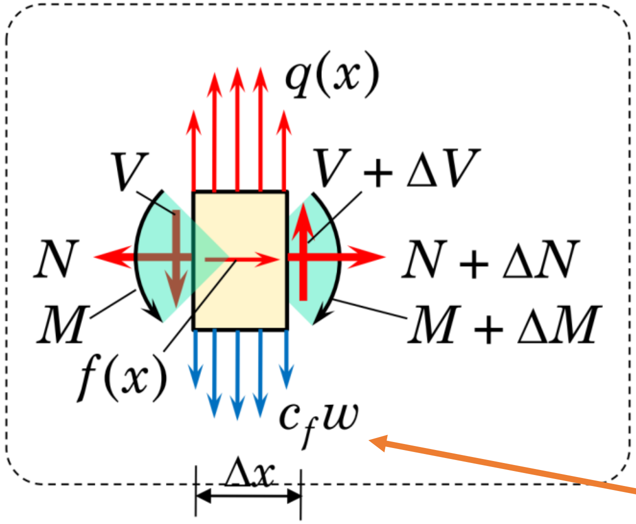
$$\begin{aligned} U_s^c =& \frac{1}{2G_{13}}\int_A (\sigma_{xz}^c)^2\, dA = \frac{3Q_0^2}{5G_{13}bh} \\ U_s^f =& \frac{1}{2G_{13}}\int_A \left(\sigma_{xz}^f\right)^2 dA = \frac{Q_0^2}{2G_{13}bh} \end{aligned} \tag{10.1.13}$$

The shear correction factor is the ratio of U_s^f to U_s^c, which gives $K_s = 5/6$. The shear correction factor, in general, depends on the geometry and material properties of the plate.

Euler-Bernoulli Beam Theory: Vector Approach







Definition of stress resultants

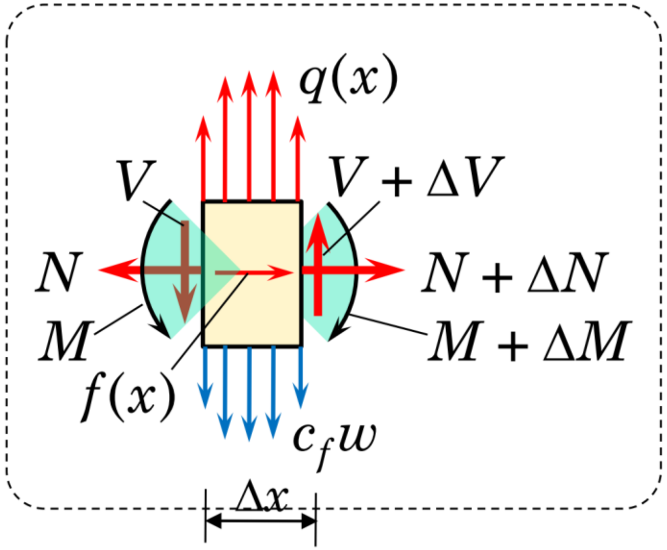
$$N = \int_A \sigma_{xx}\, dA, \quad M = \int_A \sigma_{xx} \cdot z\, dA, \quad V = \int_A \sigma_{xz}\, dA.$$

- 在正的x平面上，当右手拇指指向y方向时，另外四个手指旋转的方向就是弯矩M正方向（顺时针为正）；在负的x平面上相反。
- 在正的x平面上，剪力V的正方向就是z轴正向；在负x平面上，正方向是y轴负向。

弹性地基对梁的作用，cf是常数(相当于弹簧)。

Euler-Bernoulli Beam Theory

Summation of forces in the x and z directions and moments about the y-axis.



$$\sum F_x = 0: \quad -N + (N+\Delta N) + f\Delta x = 0$$

$$\lim \Delta x \to 0 \quad \frac{\Delta N}{\Delta x} + f = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dx} + f = 0}$$

$$\sum F_z = 0: \quad -V + (V+\Delta V) + q\Delta x - c_f w \Delta x = 0$$

$$\lim \Delta x \to 0 \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} + q - c_f w = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dx} + q - c_f w = 0}$$

$$\sum M_y = 0: \quad -V\Delta x - M + (M+\Delta M) + (q\Delta x)\alpha\Delta x - (c_f w \Delta x)\beta\Delta x = 0$$

$$\lim \Delta x \to 0 \quad -V + \frac{\Delta M}{\Delta x} + (q\Delta x)\alpha - (c_f w\Delta x)\beta = 0 \quad \boxed{\Rightarrow \frac{dM}{dx} - V = 0}$$

Equilibrium equations

$$\frac{dN}{dx} + f = 0, \quad \frac{dM}{dx} - V = 0, \quad \frac{dV}{dx} + q - c_f w = 0$$

Governing Equations in terms of the displacements

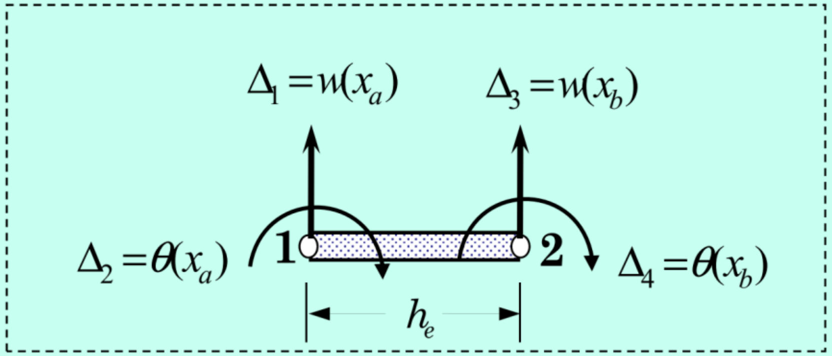
$$-\frac{d}{dx}\left[GAK_s\left(\phi_x + \frac{dw}{dx}\right)\right] + c_f w = q \qquad (1)$$

$$-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi_x}{dx}\right) + GAK_s\left(\phi_x + \frac{dw}{dx}\right) = 0 \qquad (2)$$

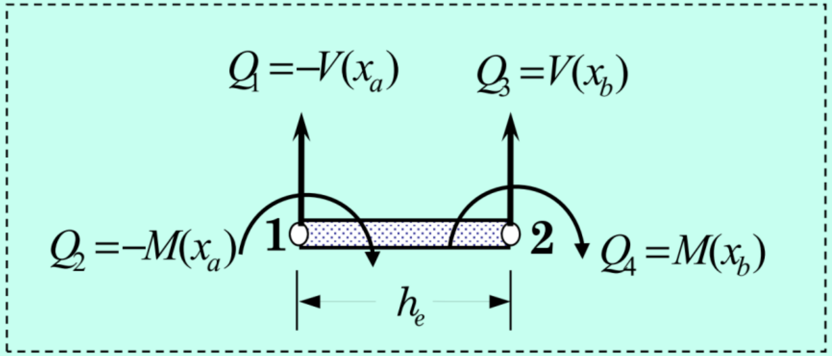
二阶偏微分方程

Beam Element Degrees of Freedom

Generalized displacements



Generalized forces



图中转角θ就是前面的Φ。

注意广义力定义和前面内力定义中的正负号区别。

$$\boxed{-\frac{d}{dx}\left[GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+c_f w=q}$$

WEAK FORMS OF TBT

Weak Form of Eq. (1)

$$0=\int_{x_a}^{x_b} v_1\left\{-\frac{d}{dx}\left[GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+c_f w-q\right\}dx$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left\{\frac{dv_1}{dx}\left[GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+c_f v_1 w-v_1 q\right\}dx-\left[v_1\cdot GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]_{x_a}^{x_b}$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left\{\frac{dv_1}{dx}\left[GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]+c_f v_1 w-v_1 q\right\}dx$$

$$-v_1(x_a)\cdot\left[-GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]_{x_a}-v_1(x_b)\cdot\left[GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]_{x_b}$$

$$\boxed{=\int_{x_a}^{x_b}\left\{GAK_s\frac{dv_1}{dx}\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)+c_f v_1 w-v_1 q\right\}dx-v_1(x_a)\cdot Q_1-v_1(x_b)\cdot Q_3}$$

$$\boxed{v_1=\delta w}$$

$$-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)=0$$

Weak Forms of TBT (continued)

Weak Form of Eq. (2)

$$0=\int_{x_a}^{x_b} v_2\left[-\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{dv_2}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s v_2\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-\left[v_2\cdot EI\frac{d\phi}{dx}\right]_{x_a}^{x_b}$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{dv_2}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s v_2\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-v_2(x_a)\cdot\left(-EI\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_a}-v_2(x_b)\cdot\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)_{x_b}$$

$$\boxed{0=\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{dv_2}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s v_2\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-v_2(x_a)\cdot Q_2-v_2(x_b)\cdot Q_4}$$

$$\boxed{v_2=\delta\Phi}$$

Total Potential Energy

$$\Pi(w,\phi_x)=\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2+\frac{GAK_s}{2}\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{c_f}{2}w^2\right]dx$$

$$-\int_{x_a}^{x_b} wq\ dx+w(x_a)Q_1+w(x_b)Q_3+\phi(x_a)Q_2+\phi(x_b)Q_4$$

$$0=\int_{x_a}^{x_b}\left\{GAK_s\frac{dv_1}{dx}\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)+c_f v_1 w-v_1 q\right\}dx-v_1(x_a)\cdot Q_1-v_1(x_b)\cdot Q_3$$

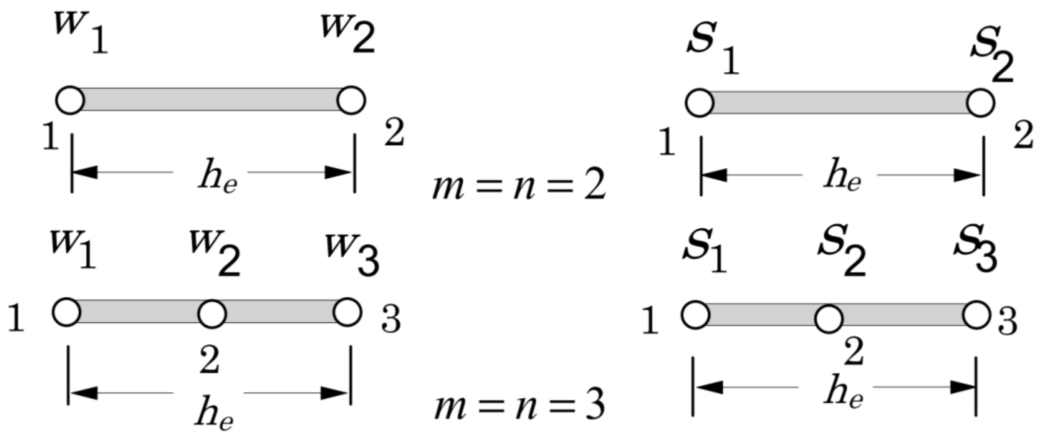
$$0=\int_{x_a}^{x_b}\left[\frac{dv_2}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)+GAK_s v_2\left(\phi+\frac{dw}{dx}\right)\right]dx-v_2(x_a)\cdot Q_2-v_2(x_b)\cdot Q_4$$

- w和Φ的最高阶导数都为1阶(Euler-Bernoulli梁中为2次)，有限元近似中需要的最低阶位移函数为两者都取1次(线性)近似。
- 积分可以按照单元分解(协调性要求)需要C^0(近似本身连续)单元，例如Lagrange单元。而Euler-Bernoulli梁需要C^1近似。
- w和Φ两者可以取不同阶次的近似。

FINITE ELEMENT MODELS OF TIMOSHENKO BEAMS

Finite Element Approximation

$$w \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \psi_j(x), \quad \phi \approx \sum_{j=1}^{n} S_j \varphi_j(x)$$



$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^{11} = \int_{x_a}^{x_b} \left(GAK_s \frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx} + c_f \psi_i \psi_j \right) dx, \quad K_{ij}^{12} = \int_{x_a}^{x_b} GAK_s \frac{d\psi_i}{dx} \varphi_j \; dx = K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{22} = \int_{x_a}^{x_b} \left[EI \frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + GAK_s \varphi_i \varphi_j \right] dx, \; K_{ij}^{21} = \int_{x_a}^{x_b} GAK_s \; \varphi_i \frac{d\psi_j}{dx} \, dx$$

$$F_i^1 = \int_{x_a}^{x_b} q\psi_i \; dx + \psi_i(x_a) Q_1 + \psi_i(x_b) Q_3, \qquad F_i^2 = \varphi_i(x_a) Q_2 + \varphi_i(x_b) Q_4$$

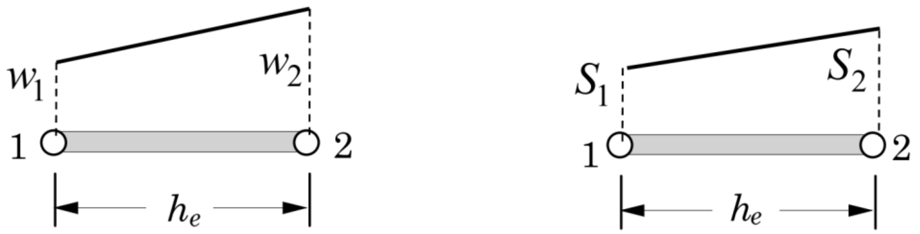
Shear Locking in Timoshenko Beams

(1) Thick beam experiences shear deformation, $\phi_x \neq -\dfrac{dw}{dx}$

(2) Shear deformation is negligible in thin beams, $\phi_x = -\dfrac{dw}{dx}$

<u>Linear interpolation of both</u> $w,\ \phi_x$: $\boxed{w \approx \sum_{j=1}^{2} w_j^e \psi_j^e(x), \quad \phi_x \approx \sum_{j=1}^{2} S_j^e \psi_j^e(x)}$

$$w(x) \approx w_1\psi_1(x) + w_2\psi_2(x), \qquad \phi_x(x) \approx S_1\psi_1(x) + S_2\psi_2(x)$$



Thus, in the **thin beam limit** it is not possible for the element to realize the requirement

$$\phi_x = -\frac{dw}{dx}$$

$$w \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \psi_j(x), \quad \phi \approx \sum_{j=1}^{n} S_j \varphi_j(x)$$

$$\frac{EI}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$$

如果二者都采用线性插值，m=n=1。对于细长(thin)梁来说，剪应变可以忽略(约等于0)，因此：

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \phi_x + \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_1^e \frac{x_b - x}{h_e} + S_2^e \frac{x - x_a}{h_e} = -\frac{w_2^e - w_1^e}{h_e}$$

$$\Downarrow$$

$$S_1^e x_b - S_2^e x_a = -(w_2^e - w_1^e), \quad S_2^e - S_1^e = 0$$

$$\Downarrow$$

$$S_1^e = S_2^e = -\frac{w_2^e - w_1^e}{h_e} \qquad \Psi(x) = S_1^e \frac{x_b - x}{h_e} + S_2^e \frac{x - x_a}{h_e} = S^e$$

二者都采用线性插值对于细长梁导致转角为常数，而转角为常数导致弯曲应变能为0，这种现象叫做剪切自锁(shear locking)。

剪切自锁问题解决方案

- 一致的插值：转角插值阶次比挠度低一阶，即m=n+1。
- 减缩积分(reduced integration): 二者采用同阶插值，但是将剪切应变能相关的刚度项积分时按照转角采用低一阶的插值而选取积分点数。

$$w \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \psi_j(x), \quad \phi \approx \sum_{j=1}^{n} S_j \varphi_j(x)$$

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{21}] & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w\} \\ \{S\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^{11} = \int_{x_a}^{x_b} \left(\boxed{GAK_s \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(1)}}{dx}} + c_f \psi_i^{(1)} \psi_j^{(1)} \right) dx$$

$$K_{ij}^{12} = \int_{x_a}^{x_b} \boxed{GAK_s \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \psi_j^{(2)}} \, dx = K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{22} = \int_{x_a}^{x_b} \left[EI \frac{d\psi_i^{(2)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(2)}}{dx} + \boxed{GAK_s \psi_i^{(2)} \psi_j^{(2)}} \right] dx$$

如果挠度和转角都取线性插值，高亮的部分取1点高斯积分(精确积分对于转角平方项需要2点高斯积分)。

剪切自锁问题解决方案

- 一致的插值：转角插值阶次比挠度低一阶，即m=n+1。
- 减缩积分(reduced integration): 二者采用同阶插值，但是将剪切应变能相关的刚度项积分时按照转角采用低一阶的插值而选取积分点数。

$$K_{ij}^{11}=\int_{x_a}^{x_b}\left(GAK_s\frac{d\psi_i}{dx}\frac{d\psi_j}{dx}+c_f\psi_i\psi_j\right)dx,\quad K_{ij}^{12}=\int_{x_a}^{x_b}GAK_s\frac{d\psi_i}{dx}\varphi_j\,dx=K_{ji}^{21}$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{x_a}^{x_b}\left[EI\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}+GAK_s\varphi_i\varphi_j\right]dx,\quad K_{ij}^{21}=\int_{x_a}^{x_b}GAK_s\,\varphi_i\frac{d\psi_j}{dx}\,dx$$

$$w\approx\sum_{j=1}^{m}w_j\psi_j(x),\quad \phi\approx\sum_{j=1}^{n}S_j\varphi_j(x)$$

$$\begin{bmatrix}[K^{11}] & [K^{12}]\\ [K^{21}] & [K^{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{w\}\\ \{S\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F^1\}\\ \{F^2\}\end{Bmatrix}$$

$$K_{ij}^{22}=\int_{x_a}^{x_b}\left[EI\frac{d\varphi_i}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}+\boxed{GAK_s\varphi_i\varphi_j}\right]dx$$

高亮的部分取减缩积分

剪切自锁问题解决方案

- 当单元增多或者近似阶次提高时，剪切自锁效应减弱。

The quadratic interpolation of both w and Ψ with full integration of the element coefficient matrices also suffers slightly from the shear-locking phenomenon. A uniform two-point quadrature rule has the desired effect on $[K^{11}]$, $K^{12}]$, and $[K^{22}]$, i.e., $[K^{11}]$, $[K^{12}]$, and the first term of $[K^{22}]$ will be evaluated exactly and the second term of $[K^{22}]$ approximately. As the degree of approximation and/or the number of elements in the mesh is increased, shear locking will disappear and reduced integration is not necessary.